Séminaire BOURBAKI juin 2015
67ème année, 2014-2015, nº 1103

CONSTRUCTION DE REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES DE TORSION
[d'après Peter Scholze]

par **Sophie MOREL**

INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de présenter les résultats de Scholze sur la construction des représentations galoisiennes de torsion associées aux caractères de l'algèbre de Hecke apparaissant dans la cohomologie de torsion des espaces localement symétriques associés au groupe $\mathbf{GL}_n$. La phrase précédente est expliquée plus en détail dans la section 1. Toutes les erreurs et inexactitudes dans ce texte sont bien entendu dues à l'auteur et non à Scholze.

Je remercie Ana Caraiani pour d'utiles remarques sur une version précédente de cet exposé.

1. QUELQUES CONJECTURES DU PROGRAMME DE LANGLANDS

1.1. Représentations automorphes

La référence standard pour la définition des formes et représentations automorphes est le texte de Borel et Jacquet dans Corvallis ([BJ]), voir aussi le livre de Moeglin et Waldspurger ([MW]).

Soit n un entier strictement positif. On note $\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f$ l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$, où

$$\mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}} = \{(x_p) \in \prod_{p \text{ premier}} \mathbb{Q}_p | x_p \text{ pour presque tout } p\}$$

est l'anneau des adèles finies (où "pour presque tout p" signifie "pour tout p sauf un nombre fini"). On fixe une mesure de Haar sur le groupe topologique

$$\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}) = \{(g_\infty, (g_p)) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \times \prod_p \mathbf{GL}_n(\mathbb{Q}_p) | g_p \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}_p) \text{ pour presque tout } p\},$$

et on note $L^2_{\mathbf{GL}_n} = L^2(\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})\mathrm{A} \setminus \mathbf{GL}_n(\mathbb{A}), \mathbb{C})$, où $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})$ est plongé diagonalement dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ et $\mathrm{A} = \mathbb{R}_{>0}$ est la composante connexe de 1 dans le centre de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.(1)

(1) On pourrait fixer un caractère unitaire quelconque ξ de A et considérer l'espace des fonctions $f : \mathbf{GL}_n(\mathbb{Q}) \setminus \mathbf{GL}_n(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $f(zg) = \xi(z)f(g)$ pour tous $z \in \mathrm{A}$ et $g \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ et qui sont L^2 modulo A. Dans cet exposé, on prendra $\xi = 1$, mais c'est uniquement pour alléger les notations.

Le groupe $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ agit sur $L^2_{\mathbf{GL}_n}$ par translation à droite sur l'argument de la fonction. Une *représentation automorphe discrète de* $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ est une représentation irréductible de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ qui apparaît comme facteur direct de la représentation $L^2_{\mathbf{GL}_n}$. En fait, on a

$$L^2_{\mathbf{GL}_n} = L^2_{\mathbf{GL}_n,disc} \oplus L^2_{\mathbf{GL}_n,cont}$$

en tant que représentation de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$, où $L^2_{\mathbf{GL}_n,cont}$ n'a pas de facteur direct irréductible et

$$L^2_{\mathbf{GL}_n,disc} = \bigoplus \pi^{m(\pi)}$$

(somme directe complétée), où la somme est sur les représentations automorphes discrètes et les $m(\pi)$ sont des entiers strictement positifs.

Soit $f \in L^2_{\mathbf{GL}_n}$ une fonction bornée. On dit que f est *cuspidale* si, pour tout sous-groupe parabolique propre $\mathbf{P}$ de $\mathbf{GL}_n$, si on note $\mathbf{N}_P$ le radical unipotent de $\mathbf{P}$ et dn une mesure de Haar sur $\mathbf{N}_P(\mathbb{A})$, alors, pour tout $g \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$,

$$\int_{\mathbf{N}_P(\mathbb{Q})\backslash\mathbf{N}_P(\mathbb{A})} f(ng)dn = 0.$$

L'espace $L^2_{\mathbf{GL}_n,cusp}$ des fonctions bornées cuspidales est un sous-espace de $L^2_{\mathbf{GL}_n}$ fermé et stable par l'action de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$, qui est contenu dans $L^2_{\mathbf{GL}_n,disc}$, c'est-à-dire somme directe complétée de représentations irréductibles de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$. Les représentations irréductibles de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ qui apparaissent dans $L^2_{\mathbf{GL}_n,cusp}$ sont dites *automorphes cuspidales*.

De plus, si π est une représentation automorphe discrète de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$, on a

$$\pi = \pi_\infty \otimes \sideset{}{'}\bigotimes_{p \text{ premier}} \pi_p,$$

où π_∞ (resp. π_p) est une représentation irréductible de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$) et, pour presque tout p, la représentation π_p est *non ramifiée*, c'est-à-dire que $\pi_p^{\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}_p)} \neq 0$ (cet espace est alors de dimension 1). Voir l'article de Flath [Fl] pour la définition du produit tensoriel restreint $\bigotimes'$ et pour des références. La classification de Langlands associe à la représentation irréductible admissible π_∞ de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ une représentation du groupe de Weil $W_\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. En restreignant cette représentation au sous-groupe $\mathbb{C}^\times$ de $W_\mathbb{R}$, on obtient un morphisme $r : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. On dit que la représentation automorphe π est *algébrique* si r est un morphisme de groupes algébriques sur $\mathbb{C}$. Cette définition est due à Clozel (définition 1.8 de [Cl1]), et peut aussi se formuler comme une condition d'intégralité sur le caractère infinitésimal de π_∞, c'est-à-dire le caractère par lequel le centre de l'algèbre universellement enveloppante de $\mathrm{Lie}(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})) \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ agit sur π_∞. (2)

(2)En fait, la définition donnée ci-dessus n'est pas tout à fait celle de Clozel, car on a supprimé la torsion par $|.|^{(n-1)/2}$. La notion que nous avons définie est celle de représentation *L-algébrique* au sens de Buzzard et Gee (cf [BG]), qui semble plus adaptée au cas d'un groupe réductif général, et qui est celle qu'utilise Scholze.

1.2. Conjecture de réciprocité de Langlands et Clozel

Conjecture 1.1. — *Soit $\pi = \pi_\infty \otimes \bigotimes'_p \pi_p$ une représentation automorphe algébrique cuspidale de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$, et soit ℓ un nombre premier. Alors il existe une représentation continue semi-simple*[3] $\rho_\pi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ *telle que, pour tout nombre premier $p \neq \ell$ tel que π_p soit non ramifiée, π_p et $\rho_{\pi|\,\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ se correspondent par l'isomorphisme de Satake.*

Donnons quelques explications sur l'énoncé. Une référence pour l'isomorphisme de Satake est le chapitre IV de l'article [Ca] de Cartier, voir aussi l'article introductif [G] de Gross. Soit p un nombre premier. Rappelons que l'on dit que π_p est non ramifiée (ou que π est non ramifiée en p) si $\pi_p^{\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}_p)} \neq 0$. Cet espace d'invariants est alors nécessairement de dimension 1, et définit donc un caractère de l'algèbre de Hecke non ramifiée $\mathcal{H}_p$ des fonctions $f : \mathbf{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathbb{C}$ à support compact et invariantes à gauche et à droite par $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ (le produit est le produit de convolution, défini en utilisant la mesure de Haar sur $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ telle que $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ soit de volume 1). Il résulte de l'isomorphisme de Satake (sous la forme, par exemple, du corollaire 4.2 de [Ca]) que l'ensemble des caractères de $\mathcal{H}_p$ est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Revenant à la conjecture, on note a_{π_p} la classe de conjugaison correspondant à π_p. Dire que $\rho_{\pi|\,\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ correspond à π_p par l'isomorphisme de Satake signifie d'abord que $\rho_{\pi|\,\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ est non ramifiée, c'est-à-dire se factorise par le quotient $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, et ensuite que l'image par ρ_π du morphisme de Frobenius géométrique (i.e. le générateur $x \longmapsto x^{1/p}$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$) est dans la classe de conjugaison a_{π_p}.[4]

D'après le théorème de densité de Čeboratev, ρ_π est uniquement déterminée par π. D'après le théorème de multiplicité un fort de Piatetski-Shapiro et Jacquet-Shalika (cf. [P-S]), π est uniquement déterminée par ρ_π.

Remarque 1.2. — En combinant les conjectures de Langlands, Clozel et Fontaine-Mazur, on obtient en fait une bijection conjecturale entre les classes d'isomorphisme de représentations automorphes cuspidales algébriques de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ et les classes d'isomorphisme de représentations continues irréductibles $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui sont géométriques (c'est-à-dire presque partout non ramifiées et de Rham en ℓ, voir [FM]).

Remarque 1.3. — En fait, Langlands conjecture qu'il existe un groupe pro-algébrique $\mathcal{L}_\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{C}$ (le groupe de Langlands de $\mathbb{Q}$) tel que, pour tout entier n, les représentations algébriques irréductibles de dimension n de $\mathcal{L}_\mathbb{Q}$ classifient les représentations automorphes cuspidales de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$. (En d'autres termes, les représentations automorphes

(3) En fait, la représentation ρ_π devrait même être irréductible, mais on ne sait le prouver que dans quelques cas particuliers, voir par exemple [BR] et le théorème D de [BLGGT].

(4) Le plongement $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ n'est pas canonique, puisqu'il dépend du choix d'un plongement $\overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. Cependant, la définition ci-dessus ne dépend pas de ce choix.

cuspidales de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ sont les objets simples de dimension n d'une catégorie Tannakienne, dont le groupe Tannakien est $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$.) Le groupe de Galois motivique $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ serait alors le quotient de $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ correspondant à la sous-catégorie des représentations algébriques. Si π est une représentation automorphe cuspidale algébrique de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ et $\varphi : \mathcal{L}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbf{GL}_{n,\mathbb{C}}$ est la représentation algébrique correspondante, on devrait obtenir ρ_π en évaluant φ sur les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-points (on choisit un isomophisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$ pour faire ceci), puis en restreignant au sous-groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ de $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (le plongement étant donné par la réalisation ℓ-adique).

1.3. Représentations automorphes et cohomologie des espaces localement symétriques

Toutes les preuves de cas particuliers de la conjecture 1.1[(5)] passent par l'étude de la cohomologie des espaces localement symétriques. Si K est un sous-groupe compact ouvert de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_f)$ (par exemple un sous-groupe d'indice fini de $\mathbf{GL}_n(\widehat{\mathbb{Z}})$), on pose

$$X_K = \mathbf{GL}_n(\mathbb{Q}) \setminus \mathbf{GL}_n(\mathbb{A})/KAK_\infty,$$

où $K_\infty = \mathbf{SO(n)} \subset \mathbf{GL_n}(\mathbb{R})$. C'est une variété analytique réelle si K est assez petit (sinon, c'est un orbifold). Dans la suite, on supposera toujours K assez petit.

Si K et K' sont deux sous-groupes ouverts compacts de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_f)$ et $g \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_f)$ est tel que $g^{-1}K'g \subset K$, on a un morphisme analytique fini $c_g : X_{K'} \longrightarrow X_K$ qui envoie la classe de $h \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ sur celle de hg. Donc, si on prend $K' = K \cap gKg^{-1}$, on obtient une correspondance $(c_g, c_1) : X_{K'} \longrightarrow X_K \times X_K$ (appelée *correspondance de Hecke*), qui induit un morphisme $u_g : H^*_c(X_K) \longrightarrow H^*_c(X_K)$, où $H^*_c(X_K)$ est la cohomologie de Betti à supports compacts et à coefficients dans $\mathbb{C}$ de X_K (voir [P] 1.2, 1.3).

Soit $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke globale, c'est-à-dire l'algèbre des fonctions localement constantes à support compact de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_f)$ dans $\mathbb{C}$, munie du produit de convolution (pour une mesure de Haar fixée sur $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_f)$). C'est une algèbre associative non unitaire. Rappelons qu'une représentation $\pi : \mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_f) \longrightarrow \mathbf{GL}(V)$ (où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) est appelée *lisse* si π est continue pour la topologie discrète sur $\mathbf{GL}(V)$, et *admissible* si, pour tout sous-groupe compact ouvert K de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_f)$, V^K est de dimension finie. Par exemple, si $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ est une représentation automorphe discrète de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}) = \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_f)$, alors π_f est lisse admissible.

La catégorie des représentations lisses de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_f)$ est naturellement équivalente à celle des représentations V de $\mathcal{H}$ telles que, pour tout $v \in V$, on ait $\mathbb{1}_K.v = v$ pour $K \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_f)$ assez petit. En particulier, toute représentation automorphe discrète de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ définit une représentation de $\mathcal{H}$.

D'autre part, on définit une action de $\mathcal{H}$ sur $H^*_c := \varinjlim_K H^*_c(X_K)$ en convenant que, pour tout sous-groupe compact ouvert K de $\mathbf{GL_n}(\mathbb{A}_f)$ et tout $g \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_f)$, la fonction caractéristique de Kg^{-1} agit sur $H^*_c(X_K)$ par l'opérateur u_g.

(5) au moins celles connues de l'auteur

Enfin, on dit qu'une représentation automorphe discrète $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ est *cohomologique* s'il existe une représentation algébrique W de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que la $(\mathfrak{g}, \mathrm{AK}_\infty)$-cohomologie de $\pi_\infty \otimes W$ soit non nulle (où $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}))$). Cela implique que π est algébrique et que le caractère infinitisémal de π_∞ vérifie de plus une condition de régularité.[(6)]

Il résulte alors de la conjecture de Borel, prouvée par Franke (théorème 18 de [Fr]), que l'on a le théorème suivant :

Théorème 1.4. — *Les sous-quotients irréductibles de la représentation de $\mathcal{H}$ sur H_c^* viennent tous de représentations automorphes cohomologiques de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$. De plus, si π est une représentation automorphe cuspidale cohomologique de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$ sur laquelle* A *agit trivialement, et si on peut prendre $W = \mathbb{1}$ dans la définition ci-dessus, alors la représentation de $\mathcal{H}$ associée à π apparaît comme un sous-quotient de H_c^*.*[(7)]

1.4. Cohomologie des variétés de Shimura et conjecture 1.1

Les espaces localement symétriques associés au groupe $\mathbf{GL}_n$ sont seulement des variétés analyiques réelles, mais, en utilisant d'autres groupes, on peut obtenir des espaces avec plus de structure (c'est-à-dire des variétés algébriques sur des corps de nombres, appelées *variétés de Shimura*). Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe sur $\mathbb{Q}$. À l'exception du théorème de multiplicité un fort, toutes les définitions et les résultats ci-dessus restent valables pour $\mathbf{G}$ (il faut remplacer $K_\infty = \mathbf{SO(n)}$ par un sous-groupe compact connexe maximal de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ et A par $\mathbf{S}(\mathbb{R})^\circ$, où $\mathbf{S}$ est le sous-tore déployé (sur $\mathbb{Q}$) maximal du centre de $\mathbf{G}$; pour l'isomorphisme de Satake, il faut supposer $\mathbf{G}$ non ramifié en p et remplacer $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ par un sous-groupe compact maximal hyperspécial de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$, voir la section 1.10 de l'article [T] de Tits).

Si par exemple $\mathbf{G}$ est le groupe symplectique $\mathbf{Sp}_{2n} \subset \mathbf{GL}_{2n}$ de la forme symplectique $x_1y_{2n} + \dots x_ny_{n+1} - x_{n+1}y_n - \cdots - x_1y_{2n}$ et $K = \mathrm{Ker}(\mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \mathbf{G}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$ pour N un entier ≥ 3 (pour que K soit assez petit), alors l'espace localement symétrique associé $X_K^{\mathbf{G}}$ est l'espace de modules des variétés abéliennes de dimension n sur $\mathbb{C}$ principalement polarisées et munies d'une structure de niveau N (voir la section 11 de l'article [K1] de Kottwitz). On peut définir le problème de modules sur $\mathbb{Q}$ (ou même $\mathbb{Z}$), et Mumford a montré que ce problème de modules est représentable par un schéma quasi-projectif (cf le théorème 7.9 de [GIT]). Les correspondances de Hecke ont aussi une description modulaire, et sont donc définies sur $\mathbb{Z}$. En utilisant le théorème de comparaison entre cohomologie de Betti et cohomologie étale et en utilisant $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ au lieu de $\mathbb{C}$ comme corps de coefficients, on en déduit que $H_{c,\mathbf{G}}^* := \varinjlim_K H_c^*(X_K^{\mathbf{G}})$ est muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ qui commute à l'action de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$. On peut donc écrire la semi-simplifiée

(6) Les π_∞ possibles ont été classifiées par Vogan et Zuckerman dans [VZ].

(7) On obtiendrait les représentations cohomologiques pour les W non triviales en prenant la cohomologie à coefficients dans un système local non trivial sur les X_K.

de cette représentation de la manière suivante :

$$(H^i_{c,\mathbf{G}})^{ss} = \bigoplus_{\pi=\pi_\infty\otimes\pi_f} \pi_f \otimes \sigma^i(\pi_f),$$

où π parcourt l'ensemble des représentations automorphes cohomologiques de $\mathbf{G}(\mathbb{A})$ et les $\sigma^i(\pi_f)$ sont des représentations semi-simples de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Il n'est pas évident en général de déterminer $\sigma^i(\pi_f)$ en fonction de π_f, mais, si l'on utilise la cohomologie d'intersection (voir par exemple [BBD]) au lieu de la cohomologie à supports compacts, alors on a une formule conjecturale très précise pour $\sigma^i(\pi_f)$, due à Langlands, Rapoport et Kottwitz (cf la section 10 de [K1]). Cette formule fait intervenir la conjecture de réciprocité de Langlands pour le groupe $\mathbf{G}$.

De plus, tout le paragraphe précédent est en fait valable pour les groupes $\mathbf{G}$ dont les espaces localement symétriques sont des variétés de Shimura de type PEL, par exemple les groupes unitaires et certains groupes orthogonaux (voir la section 5 de l'article [K2] de Kottwitz), à la différence que la structure de variété algébrique des $X_K^{\mathbf{G}}$ est en général définie non pas sur $\mathbb{Q}$, mais sur une extension finie de $\mathbb{Q}$ appelée corps reflex. Si on choisit le groupe $\mathbf{G}$ (et le degré i) correctement, la cohomologie d'intersection en degré i (qui, dans le cas où $\mathbf{G}^{der}$ est anisotrope sur $\mathbb{Q}$, est simplement $H^i_{c,\mathbf{G}}$, car les $X_K^{\mathbf{G}}$ sont alors des schémas projectifs) réalise conjecturalement une partie de la correspondance de Langlands pour le groupe $\mathbf{G}$. De plus, dans de nombreux cas, la conjecture est en fait connue.

Si l'on veut obtenir des informations sur la conjecture 1.1 pour $\mathbf{GL}_n$, on peut passer des représentations automorphes de $\mathbf{GL}_n$ à celles d'un autre groupe en utilisant le principe de fonctorialité de Langlands (conjectural lui aussi en général, mais connu dans les cas que l'on veut utiliser ici). Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe sur $\mathbb{Q}$, déployé pour simplifier, et soit $\widehat{\mathbf{G}}$ son dual de Langlands (le groupe réductif connexe sur $\mathbb{C}$ obtenu en échangeant le rôle des racines et des coracines dans la donnée radicielle de $\mathbf{G}$). Alors les représentations automorphes cuspidales de $\mathbf{G}(\mathbb{A})$ sont conjecturalement classifiées par les paramètres de Langlands, qui sont des morphismes algébriques irréductibles(8) $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \widehat{\mathbf{G}}$. En général, cette paramétrisation n'est plus bijective, et l'on s'attend à ce que chaque paramètre corresponde à un ensemble fini de représentations automorphes cuspidales, appelé un L-paquet. En tout cas, si l'on a deux groupes réductifs connexes $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ et un morphisme $\widehat{\mathbf{G}} \longrightarrow \widehat{\mathbf{H}}$, cette conjecture implique que l'on a un "transfert" qui envoie une représentation automorphe cuspidale de $\mathbf{G}(\mathbb{A})$ sur un L-paquet de représentations automorphes de $\mathbf{H}(\mathbb{A})$ (de manière compatible à l'isomorphisme de Satake aux places où les représentations sont non ramifiées). On devrait aussi pouvoir caractériser l'image de ce transfert.(9)

(8) c'est-à-dire dont l'image n'est contenue dans aucun sous-groupe parabolique

(9)Le transfert ne préserve pas la cuspidalité en général, il faut donc travailler avec les représentations automorphes discrètes, qui sont (conjecturalement) paramétrées par des paramètres d'Arthur ψ : $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}} \times \mathbf{SL_2}(\mathbb{C}) \longrightarrow \widehat{\mathbf{G}}$ et non des paramètres de Langlands.

Par exemple, si $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2n}$ et $\mathbf{H} = \mathbf{GL}_{2n+1}$, alors $\widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{SO_{2n+1}}(\mathbb{C})$ se plonge de manière évidente dans $\widehat{\mathbf{H}} = \mathbf{GL}_{2n+1}(\mathbb{C})$. Dans ce cas, l'existence du transfert et ses propriétés ont été établies par Arthur dans le livre [Ar]; l'image du transfert est caractérisée par une condition d'autodualité et une condition sur les pôles d'une certaine fonction L, voir le théorème 1.5.3 de [Ar]. Si $\mathbf{G}$ est un groupe unitaire et $\mathbf{H}$ un groupe général linéaire, on a des résultats similaires, dûs à Mok ([M]) et Kaletha-Minguez-Shin-White ([KMSW]).

En utilisant le transfert des groupes unitaires vers les groupes généraux linéaires, le calcul de la cohomologie des variétés de Shimura de certains groupes unitaires, le lemme fondamental et des techniques d'interpolation p-adique pour attraper certaines représentations automorphes, on arrive au résultat suivant (dû, au moins, à Kottwitz, Clozel, Labesse, Harris-Taylor, Fargues, Mantovan, Shin, Laumon-Ngô, Waldspurger, Bellaïche-Chenevier(10)) :

Théorème 1.5. — *([CHLB])(11) La conjecture 1.1 est vraie pour les représentations automorphes cuspidales cohomologiques autoduales (c'est-à-dire isomorphes à leur contragrédiente).*

1.5. Représentations non autoduales

Les méthodes de la section précédente ne peuvent s'appliquer aux représentations non autoduales de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$. En effet, toutes les représentations venant par transfert depuis un groupe ayant une variété de Shimura vérifient une propriété d'autodualité.

L'approche suivante a été suggérée par Clozel. Si $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2n} \subset \mathbf{GL}_{2n}$ est le groupe symplectique de la forme antidiagonale (comme plus haut), alors le groupe $\mathbf{P} = \mathbf{Sp}_{2n} \cap \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ est un sous-groupe parabolique maximal de $\mathbf{G}$, de quotient de Levi isomorphe à $\mathbf{GL}_n$. Si π est une représentation automorphe cuspidale cohomologique de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A})$, elle définit donc par induction parabolique une représentation automorphe(12) Π de $\mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{A})$, cf [L], qui n'est évidemment pas cuspidale, mais se trouve être aussi cohomologique. Comme le groupe $\mathbf{Sp}_{2n}$ admet une variété de Shimura, on peut essayer d'appliquer les techniques de la section précédente à Π. Malheureusement, les représentations galoisiennes qui apparaissent dans la composante Π_f-isotypique (où $\Pi = \Pi_\infty \otimes \Pi_f$) de la cohomologie des $X_K^{\mathbf{G}}$ ne sont pas très intéressantes (on obtient quelque chose qui ressemble beaucoup à la puissance extérieure n-ième de la représentation de dimension n que l'on essaie de construire).

Une autre idée, au lieu d'utiliser directement la cohomologie de Betti des $X_K^{\mathbf{G}}$, est d'utiliser l'autre réalisation cohomologique des formes automorphes (comme sections de certains fibrés vectoriels, dits "automorphes", sur les espaces localement symétriques)

(10) L'auteur regrette de ne pouvoir garantir l'exhaustivité de cette liste.

(11) On a un résultat similaire pour les représentations du groupe $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, où F est un corps de nombres totalement réel ou CM. Un énoncé précis est rappelé dans le thérorème V.1.4 de [Sch3].

(12) ou plusieurs...

pour approcher p-adiquement la représentation Π par des représentations automorphes cuspidales cohomologiques de $\mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{A})$ (où p est un nombre premier fixé arbitrairement). Ces représentations se transfèrent alors en des représentations automorphes autoduales de $\mathbf{GL}_{2n+1}(\mathbb{A})$ (voir la discussion sur le transfert plus haut), qui ont des représentations galoisiennes associées (à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$). En prenant la limite de ces représentations galoisiennes (ou plutôt de leurs caractères), on obtient une représentation galoisienne de dimension $2n+1$, dont il est possible d'extraire la représentation ρ_π cherchée. Cette stratégie a été menée à bien de manière indépendante par Harris-Lan-Taylor-Thorne ([HLTT]), Scholze ([Sch3]) et Boxer. En fait, Scholze et Boxer prouvent des résultats plus forts, que nous allons expliquer ci-dessous.

D'abord, remarquons que le paragraphe précédent n'a pas de sens a priori, car les représentations automorphes sont à coefficients dans $\mathbb{C}$, et non $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Mais d'après le théorème 1.4 ci-dessus (qui est valable pour un groupe réductif connexe quelconque), on peut remplacer l'étude des représentations automorphes cohomologiques par celle des sous-quotients de la représentation $H^*_{c,\mathbf{G}} = \varinjlim_K H^*_c(X^{\mathbf{G}}_K)$ de l'algèbre de Hecke globale $\mathcal{H}_{\mathbf{G}}$ de $\mathbf{G}$ (l'algèbre des fonctions localement constantes à support compact $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f) \longrightarrow \mathbb{C}$, munie du produit de convolution). Mais tant la cohomologe de Betti que l'algèbre de Hecke globale ont un sens si l'on remplace le corps de coefficients $\mathbb{C}$ par un anneau commutatif de coefficients quelconque A;(13) notons $H^*_{c,\mathbf{G}}(A)$ et $\mathcal{H}_{\mathbf{G}}(A)$ les objets ainsi obtenus. Si l'on a deux représentations de $\mathcal{H}_{\mathbf{G}}(\mathbb{Q}_p)$ apparaissant dans $H^*_{c,\mathbf{G}}(\mathbb{Q}_p)$, cela a un sens de demander qu'elle soient p-adiquement proches, mais ce n'est pas encore exactement ce que l'on veut faire. En effet, on veut approximer la classe d'isomorphisme d'une représentation et non la représentation elle-même. Il est donc naturel de chercher à approximer le caractère de la représentation, et pour cela il est plus commode de fixer le niveau K (afin d'avoir des représentations de dimension finie).

On fixe donc un sous-groupe compact ouvert K de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, et on suppose que K est de la forme $\prod_v K_v$, avec v parcourant les nombres premiers et K_v un sous-groupe compact ouvert de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_v)$. Il existe un ensemble fini S de nombres premiers tel que, pour tout $v \notin S$, le groupe $\mathbf{G}$ soit non ramifié en v et K_v soit hyperspécial (voir le début de la section 1.4 pour la définition), et on fixe un tel S. Pour tout $v \notin S$, on note $\mathcal{H}_{v,\mathbf{G}}$ l'algèbre de Hecke locale non ramifiée en v, c'est-à-dire l'algèbre des fonctions $f : \mathbf{G}(\mathbb{Q}_v) \longrightarrow \mathbb{Z}$ à support compact et bi-invariantes par K_v, munie du produit de convolution (pour la mesure de Haar sur $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_v)$ telle que K_v soit de volume 1; pour le fait que le produit de convolution de deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est bien une fonction à valeurs dans $\mathbb{Z}$, voir par exemple la section 2 de [G]). On note aussi $\mathcal{H}^S_{\mathbf{G}} = \bigotimes_{v\notin S} \mathcal{H}_{v,\mathbf{G}}$. Grâce à l'isomorphisme de Satake, les algèbres $\mathcal{H}_{v,\mathbf{G}}$ et $\mathcal{H}^S_{\mathbf{G}}$ sont commutatives, donc leurs représentations irréductibles sont simplement des caractères. De plus, l'algèbre $\mathcal{H}^S_{\mathbf{G}}$ agit sur la cohomologie (de Betti) $H^*_c(X^{\mathbf{G}}_K, A)$, pour tout anneau

(13)Ce n'est pas tout à fait vrai. A priori, il faudrait avoir une mesure de Haar sur $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ à valeurs dans A, ce qui est une condition non triviale. On verra dans le paragraphe suivant comment faire si $A = \mathbb{Z}$.

commutatif A. Notons que ces constructions sont possibles pour n'importe quel groupe réductif connexe $\mathbf{G}$.

On peut alors faire la chose suivante. On prend comme avant $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2n}$, et on voit $\mathbf{GL}_n$ comme le quotient de Levi d'un sous-groupe parabolique maximal de $\mathbf{G}$. Soient π et Π comme plus haut. On choisit le sous-groupe compact ouvert K de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ tel que $\Pi^{\mathrm{K}} \neq 0$. Alors Π correspond à un caractère φ de $\mathcal{H}^S_{\mathbf{G}}$ qui apparaît comme un sous-quotient de $H^*_c(X^{\mathbf{G}}_K, \mathbb{C})$. Le choix d'un isomorphisme $\mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_p$ permet de voir φ comme un caractère à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, et on montre qu'il existe une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$ telle que φ soit à valeurs dans $\mathcal{O}_E$. La question devient alors de savoir si l'on peut trouver une suite $(\Pi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de représentations automorphes cohomologiques *cuspidales* de $\mathbf{G}(\mathbb{A})$ telle que $(\Pi_i)^{K^S} \neq 0$ pour tout i (où $K^S = \prod_{v\notin S} K_v$) et que, si $\varphi_i : \mathcal{H}^S_{\mathbf{G}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ est le caractère associé à Π_i comme plus haut, on ait

$$\lim_{i\to\infty} \varphi_i(x) = \varphi(x)$$

pour tout $x \in \mathcal{H}^S_{\mathbf{G}}$, où on prend la limite pour la topologie p-adique sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

Harris, Lan, Taylor et Thorne ont étés les premiers à donner une réponse affirmative à cette question, ce qui leur a permis de prouver le théorème suivant :

Théorème 1.6. — *(*[HLTT]*) La conjecture 1.1 est vraie si π est cohomologique.*(14)

Rappelons que la méthode esquissée ci-dessus ne donne pas directement la représentation ρ_π, mais plutôt quelque chose qui ressemble à $\rho_\pi \oplus (\rho_\pi)^*$. Il y a une dernière étape qui consiste à extraire ρ_π de cette représentation, et que nous ignorerons totalement (voir la section V.3 [Sch3]).

Scholze et Boxer ont reprouvé ce résultat (indépendemment de Harris-Lan-Taylor-Thorne et indépendamment l'un de l'autre) et l'ont généralisé aux caractères de $\mathcal{H}^S_{\mathbf{GL}_n}$ apparaissant dans la torsion de $H^*_c(X^{\mathbf{GL}_n}_K, \mathbb{Z})$. (Noter qu'il s'agit maintenant de l'algèbre de Hecke et de l'espace localement symétrique pour $\mathbf{GL}_n$, et non $\mathbf{Sp}_{2n}$.) Plus précisément, on a la conjecture suivante, due à Ash :

Conjecture 1.7. — *(*[As1],[As2]*) Soit S un ensemble fini de nombres premiers. Si $\varphi : \mathcal{H}^S_{\mathbf{GL}_n} \longrightarrow \mathbb{F}_p$ est un caractère qui apparaît dans $H^*_c(X^{\mathbf{GL}_n}_K, \mathbb{F}_p)$, pour $K = \prod_v K_v$ un sous-groupe compact ouvert de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_f)$ tel que $K_v = \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}_v)$ si $v \notin S$, alors il existe une représentation semi-simple $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ telle que, pour tout $v \notin S \cup \{p\}$, $\varphi_{|\mathcal{H}_{v,\mathbf{GL}_n}}$ et $\rho_{|\,\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ se correspondent par l'isomorphisme de Satake.*(15)

(14)Et on a un résultat similaire pour les représentations automorphes de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, si F est un corps de nombres totalement réel ou CM. Notons que la preuve dans le cas CM utilise les variétés de Shimura des groupes unitaires quasi-déployés au lieu de celles des groupes symplectiques.

(15)Voir les explications après la conjecture 1.1.

2. ÉNONCÉ DU THÉORÈME PRINCIPAL ET STRATÉGIE DE LA PREUVE

THÉORÈME 2.1. — *(Scholze* [Sch3]*, Boxer) La conjecture 1.7 est vraie.*[16]

Notons que l'on a en fait une version du théorème ci-dessus pour la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, pour tout entier strictement positif m (mais l'énoncé est un peu plus compliqué à formuler, voir le théorème V.3.1 de [Sch3]). En passant à la limite sur m, on obtient donc une nouvelle preuve du théorème 1.6. Dans ce texte, nous nous concentrerons pour simplifier sur le cas où $m = 1$.

On va présenter la preuve de Scholze (dans les grandes lignes), qui utilise la théorie des espaces perfectoïdes (voir l'article introductif [Sch2] de Scholze ou l'exposé [Fo] de Fontaine au séminaire Bourbaki). La preuve de Boxer n'utilise pas cette théorie, mais les détails de cette preuve ne sont pas connus de l'auteur.

On se ramène tout d'abord à un énoncé sur la torsion dans la cohomologie de certaines variétés de Shimura, de la manière suivante. Comme dans la section 1.5, on pose $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2n}$, et on voit $\mathbf{GL}_n$ comme le quotient de Levi d'un sous-groupe parabolique maximal $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$. Pour tout nombre premier v, l'application "terme constant le long de $\mathbf{P}$" (voir par exemple la formule (19) de [Ca]) définit un morphisme injectif d'algèbres $\mathcal{H}_{v,\mathbf{G}} \longrightarrow \mathcal{H}_{v,\mathbf{GL}_n}$. D'où, si S est un ensemble fini de nombres premiers, un morphisme $\mathcal{H}^S_{\mathbf{G}} \longrightarrow \mathcal{H}^S_{\mathbf{GL}_n}$.

D'autre part, soit K un sous-groupe ouvert compact de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$. L'espace localement symétrique $X^{\mathbf{G}}_K$ n'est pas compact, mais il admet une compactification $\overline{X}^{\mathbf{G}}_K$ appelée *compactification de Borel-Serre* et définie dans [BS], qui est une variété analytique réelle à coins ayant la même cohomologie (sans supports) que $X^{\mathbf{G}}_K$ et telle que le bord $\overline{X}^{\mathbf{G}}_K - X^{\mathbf{G}}_K$ admette une stratification par des sous-variétés analytiques réelles de la forme $X^{\mathbf{Q}}_{K_Q}$, pour $\mathbf{Q}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ et K_Q un sous-groupe compact ouvert de $\mathbf{Q}(\mathbb{A}_f)$. En particulier, on a des strates correspondant au sous-groupe parabolique maximal $\mathbf{P}$. Comme on a un morphisme surjectif $\pi : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{GL}_n$ (qui identifie $\mathbf{GL}_n$ au quotient de Levi de $\mathbf{P}$), on obtient, pour tout sous-groupe compact ouvert K_P de $\mathbf{P}(\mathbb{A}_f)$, un morphisme surjectif $X^{\mathbf{P}}_{K_P} \longrightarrow X^{\mathbf{GL}_n}_{\pi(K_P)}$, qui se trouve être un fibré en $(S^1)^N$, où N est la dimension du radical unipotent de $\mathbf{P}$. En utilisant ce fait et la suite exacte longue d'excision, on montre que tout caractère φ de $\mathcal{H}^S_{\mathbf{GL}_n}$ qui apparaît dans un $H^*_c(X^{\mathbf{GL}_n}_{K_{\mathbf{GL}_n}}, \mathbb{F}_p)$ apparaît aussi dans un $H^*_c(X^{\mathbf{G}}_K, \mathbb{F}_p)$ (c'est-à-dire que le composé $\varphi' : \mathcal{H}^S_{\mathbf{G}} \longrightarrow \mathbb{F}_p$ de φ et du morphisme $\mathcal{H}^S_{\mathbf{G}} \longrightarrow \mathcal{H}^S_{\mathbf{GL}_n}$ ci-dessus apparaît dans un $H^*_c(X^{\mathbf{G}}_K, \mathbb{F}_p)$). Pour les détails, voir le début de la section V.2 de [Sch3].

On se ramène donc à montrer le théorème suivant :

(16) Comme dans le cas du théorème 1.6, Scholze et Boxer prouvent en fait un résultat valable pour le groupe $\mathbf{GL}_n$ sur un corps de nombres totalement réel ou CM.

Théorème 2.2. — *(théorèmes I.5 et IV.3.1 de* [Sch3]*)* [17] *Soit* $\varphi : \mathcal{H}_{\mathbf{G}}^{K} \longrightarrow \mathbb{F}_p$ *un caractère apparaissant dans un* $H_c^*(X_K^{\mathbf{G}}, \mathbb{F}_p)$ *(pour un* K *hyperspécial aux places hors de* S*, comme au-dessus du théorème 1.6). Alors il existe une représentation automorphe cuspidale cohomologique* π *de* $\mathbf{G}(\mathbb{A})$*, non ramifiée en les places hors de* S *et telle que, si* ψ *est le caractère correspondant de* $\mathcal{H}_{\mathbf{G}}^{S}$*, vu comme un morphisme* $\mathcal{H}_{\mathbf{G}}^{S} \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_p$*, alors la réduction modulo* p *de* ψ *soit égale à* φ*.*

Pour prouver ce théorème, on veut comparer un caractère de $\mathcal{H}_{\mathbf{G}}^{S}$ qui apparaît dans un groupe de cohomologie de Betti (ou étale) $H_c^*(X_K^{\mathbf{G}}, \mathbb{F}_p)$ avec un caractère venant d'une représentation automorphe cuspidale. On peut voir les formes automorphes cuspidales sur $\mathbf{G}(\mathbb{A})$ comme les sections d'un certain faisceau cohérent sur $X_K^{\mathbf{G}}$, et Scholze a justement un théorème de comparaison entre la cohomologie d'un $\mathbb{F}_p$-système local $\mathbb{L}$ sur un espace adique propre et lisse X sur $\mathbb{C}_p$ et celle de $\mathbb{L} \otimes \mathcal{O}_X^+/p$ (corollaire 5.11 de [Sch1] et théorème 3.3 de [Sch2]). Voir la section 3 pour des rappels sur ce théorème. Dans notre cas, le système local $\mathbb{L}$ sera le système local trivial, et on compare sa cohomologie à celle du "faisceau des formes cuspidales" sur $X_K^{\mathbf{G}}$, on plutôt sur sa compactification de Baily-Borel $X_K^{\mathbf{G},*}$. Voir la section 5.1.

Il faut ensuite passer de la cohomologie du faisceau des formes cuspidales à ses sections globales. Or, Scholze a prouvé que la cohomologie d'un faisceau cohérent sur un espace perfectoïde affinoïde est presque nulle. Les variétés de Shimura ne sont pas perfectoïdes, mais Scholze prouve le résultat suivant : Soit p un nombre premier. Si on fixe un sous-groupe compact ouvert K^p de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f{}^p)$, où $\mathbb{A}_f{}^p = \prod'_{v \neq p} \mathbb{Q}_v$, alors la limite projective $X_{K^p}^{\mathbf{G}}$ des $X_{K_p K^p}^{\mathbf{G}}$ lorsque K_p parcourt les sous-groupes compacts ouverts de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$ "est" un espace perfectoïde (dans un sens à préciser), qu'on appelle parfois "variété de Shimura de niveau infini en p". De plus, on a un résultat similaire pour les compactifications de Baily-Borel de ces variétés. La preuve de ce résultat utilise de manière essentielle le morphisme des périodes de Hodge-Tate, qui n'est défini que sur la variété de Shimura de niveau infini. Voir la section 4.

On se place donc sur la variété de Shimura de niveau infini en p. En utilisant un recouvrement (explicite) par des ouverts affinoïdes perfectoïdes, on montre que l'on peut approximer la cohomologie du faisceau des formes cuspidales par des sections de ce faisceau sur ces ouverts, qui sont des vecteurs propres pour l'action de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\mathbf{G}}^{S}$. Il faut encore prolonger ces sections à toute la variété de Shimura, sans changer les valeurs propres pour l'action de l'algèbre de Hecke. La méthode classique utilise l'invariant de Hasse, qui ne suffit pas ici. Cependant, en utilisant le morphisme des périodes de Hodge-Tate (qui est équivariant sous l'action des correspondances de Hecke en dehors de p), on construit de "faux" invariants de Hasse qui jouent le même rôle et permettent de finir la preuve. Voir la section 5.2.

[17] Ce théorème est en fait valable pour tous les groupes $\mathbf{G}$ définissant des variétés de Shimura de type Hodge.

Notons que la preuve du théorème 2.1 n'est pas l'unique application des méthodes de [Sch3]. Voir la section 6 pour quelques autres applications.

3. UN THÉORÈME DE COMPARAISON

Le théorème suivant est le début de la preuve par Scholze du théorème de comparaison entre cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique.

THÉORÈME 3.1. — *(théorème 5.1 de* [Sch1] *ou théorème 3.3 de* [Sch2]*) Soit C une extension complète algébriquement close de $\mathbb{Q}_p$, d'anneau des entiers $\mathcal{O}_C$, et soit X un espace adique propre et lisse* (18) *sur $(C, \mathcal{O}_C)$. Alors, pour tout $\mathbb{F}_p$-système local $\mathbb{L}$ sur X, on a des presque isomorphismes*

$$H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{L}) \otimes \mathcal{O}^a/p \simeq H^i(X_{\text{ét}}, \mathcal{O}_X^{+a}/p),$$

où $\mathcal{O}_X^+ \subset \mathcal{O}_X$ est le faisceau des fonctions bornées par 1 sur X.

Pour des rappels et des références sur les espaces adiques, voir le début de la section 2 de [Fo]. On peut par exemple prendre pour X l'espace adique associé à un schéma propre et lisse sur C, mais une des forces du résultat de Scholze est qu'il s'applique aussi aux espaces adiques ne venant pas d'un schéma. Pour des rappels sur le langage des presque mathématiques, voir la section 1.6 de [Fo]; un “presque isomorphisme” (ou un isomorphisme de presque $\mathcal{O}_C$-modules) est un morphisme de $\mathcal{O}_C$-modules dont le noyau et le conoyau sont annulés par l'idéal maximal de $\mathcal{O}_C$, et les “a” en exposant sont là pour rappeler que l'on considère les objets comme des presque $\mathcal{O}_C$-modules.

Mentionnons aussi que le théorème ci-dessus est toujours valable si l'on remplace $\mathcal{O}_C$ par un sous-anneau de valuation ouvert et borné C^+ de C, et dans le cas relatif (c'est-à-dire pour les images directes par un morphisme propre et lisse de variétés analytiques rigides sur C, cf le corollaire 5.11 de [Sch1]).

PREUVE (esquisse) — Il y a trois étapes dans la preuve.

(1) (Cf le théorème 4.9 de [Sch1].) Si X est une variété analytique rigide affinoïde et connexe sur C (où C est comme dans l'énoncé), si $x \in X(C)$ et si $\pi = \pi_1(X, x)$ (le groupe fondamental étale profini de X), alors, pour tout $\mathbb{F}_p$-système local $\mathbb{L}$ sur X, les morphismes canoniques

$$H^i_{cont}(\pi, \mathbb{L}_x) \longrightarrow H^i(x_{\text{ét}}, \mathbb{L})$$

sont des isomorphismes. (Autrement dit, X est un $K(\pi, 1)$ pour les coefficients de p-torsion.)

Il faut montrer que toute classe de cohomologie dans un $H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{L})$ pour $i > 0$ est tuée par un revêtement fini étale de X. On se ramène facilement au cas où $\mathbb{L}$ est le système local trivial $\mathbb{F}_p$.

(18) En fait, l'hypothèse de lissité est superflue, voir le théorème 3.17 de [Sch2].

Chaque revêtement fini étale de X est affinoïde, donc de la forme $\mathrm{Spa}(A, A^+)$. En prenant une complétion appropriée de la limite inductive de ces C-algèbres A, on obtient une C-algèbre perfectoïde (A_∞, A_∞^+), dont le Spa est un espace perfectoïde X_∞, qui mérite le nom de revêtement fondamental de X. (Voir [Fo] pour une introduction aux espaces perfectoïdes.) Il s'agit maintenant de montrer que $H^i(X_{\infty,\text{ét}}, \mathbb{F}_p) = 0$ pour $i > 0$. En utilisant le basculement (ou tilt), on se ramène à montrer le résultat similaire pour l'espace perfectoïde $X_\infty^\flat$ sur le corps perfectoïde $C^\flat$, qui est de caractéristique p. Cela résulte alors de la suite exacte d'Artin-Schreier $0 \to \mathbb{F}_p \to \mathcal{O}_{X_\infty^\flat} \to \mathcal{O}_{X_\infty^\flat} \to 0$ et du fait que $X_\infty^\flat$ n'a pas de revêtement fini étale non trivial.

(2) On prouve ensuite que, si X est un espace adique propre et lisse sur C et $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{F}_p$-système local sur X, alors les groupes de cohomologie $H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{L} \otimes \mathcal{O}_X^+/p)$ sont presque de type fini, et presque nuls pour $i > 2\dim X$. (Lemme 5.8 de [Sch1].) L'idée de la preuve est classique (déjà utilisée par Cartan et Serre pour les variétés analytiques complexes et par Kiehl pour les variétés analytiques rigides; bien sûr, il faut faire marcher cette idée) : on calcule la cohomologie de X en utilisant le complexe de Čech d'un nombre fini de recouvrements par des ouverts affinoïdes dont chacun raffine assez le précédent. (Les méthodes de (1) sont utilisées pour prouver que tous les groupes de cohomologie qui apparaissent sont presque de type fini.)

(3) Enfin, pour prouver le théorème, on utilise la topologie pro-étale de X. C'est une topologie de Grothendieck plus fine que la topologie étale; l'idée de base est simplement que l'on autorise des recouvrements par des limites projectives d'espaces étales sur X, mais les détails techniques ne sont pas totalement évidents (voir la section 3 de [Sch1] pour la définition rigoureuse). Ce qui rend cette topologie si utile est le fait que *tout espace adique localement noethérien est pro-étale localement perfectoïde* (voir la proposition 4.8 de [Sch1]). On peut donc introduire le faisceau structurel complété basculé $\widehat{\mathcal{O}}^+_{X^\flat}$, qui est un faisceau (de p-torsion) sur le site pro-étale $X_{\text{proét}}$, et l'utiliser pour calculer les $H^i(X_{\text{proét}}, \mathbb{L})$ via la suite exacte longue de cohomologie pro-étale de la suite exacte d'Artin-Schreier $0 \to \mathbb{L} \to \mathbb{L} \otimes \widehat{\mathcal{O}}^+_{X^\flat} \to \mathbb{L} \otimes \widehat{\mathcal{O}}^+_{X^\flat} \to 0$ (une suite exacte de faisceaux sur $X_{\text{proét}}$). On utilise le résultat de finitude de (2) pour montrer que les morphismes de connexion (c'est-à-dire ceux allant d'un H^i dans un H^{i+1}) dans la suite exacte longue ci-dessus sont nuls. Notons qu'on a aussi utilisé sans le dire un théorème de comparaison entre cohomologies étale et pro-étale, voir le corollaire 3.17 de [Sch1].

Le théorème 3.1 admet une version plus générale (au moins pour les espaces adiques provenant de schémas), pour des systèmes de coefficients constructibles, qui est celle dont on aura besoin.

Théorème 3.2. — *(théorème 3.13 de* [Sch2]*) Soit C comme dans le théorème 3.1, soit X l'espace adique associé à un schéma propre sur C, et soit $\mathbb{L}$ l'image inverse sur $X_{\text{ét}}$ d'un $\mathbb{F}_p$-faisceau étale constructible sur ce schéma. Alors on a des presque* *isomorphismes*

$$H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{L}) \otimes \mathcal{O}_C^a/p \simeq H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{L} \otimes \mathcal{O}_X^{+a}/p).$$

Comme pour le théorème 3.1, on peut remplacer $\mathcal{O}_C$ par un $C^+ \subset C$ plus général, et on a une version relative.

La preuve du théorème utilise, outre le théorème 3.1 et la résolution des singularités, le lemme simple suivant.

Lemme 3.3. — *(*[Sch1]*, lemme 3.14) Soit X un espace adique localement noethérien sur* $\mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p)$*, et soit $i : Z \longrightarrow X$ un sous-espace fermé de X. Alors le morphisme $i^*\mathcal{O}_X^+/p \longrightarrow \mathcal{O}_Z^+/p$ est un isomorphisme (de faisceaux sur $X_{\text{ét}}$).*

Pour l'application aux variétés de Shimura, il est plus naturel d'introduire d'abord la variété de Shimura perfectoïde.

4. VARIÉTÉ DE SHIMURA PERFECTOÏDE ET MORPHISME DE HODGE-TATE

On utilise à nouveau les notations de la section 1.4, sauf que l'on prend ici $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_{2n} \subset \mathbf{GL}_{2n}$ (le groupe général symplectique). Pour tout sous-groupe ouvert compact K de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ (assez petit), l'espace localement symétrique $X_K = X_K^{\mathbf{G}}$ est l'ensemble des points complexes d'une variété quasi-projective lisse sur $\mathbb{Q}$, que l'on notera encore X_K. Cette variété n'est pas projective (sauf si $n = 0$), mais elle admet une compactification canonique X_K^*, qui est une variété projective normale sur $\mathbb{Q}$, appelée compactification minimale, de Baily-Borel ou de Satake-Baily-Borel (voir l'article [BB] de Baily-Borel pour la construction sur $\mathbb{C}$, et le livre [CF] de Chai et Faltings pour la construction sur $\mathbb{Q}$[19]). Notons que X_K^* est munie d'un fibré en droites ample canonique (sur X_K, c'est le déterminant du faisceau des formes différentielles invariantes de degré 1 sur le schéma abélien universel sur X_K).

On fixe un nombre premier p, et on note $\mathcal{X}_K$ et $\mathcal{X}_K^*$ les espaces adiques sur $\mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p)$ associés aux schémas X_K et X_K^*. On note encore ω le fibré en droites sur $\mathcal{X}_K^*$ associé au fibré en droites ω sur X_K^*.

D'autre part, soit $V = \mathbb{Q}^{2n}$, muni de la forme symplectique définie dans la section 1.4. On note Fl la variété (sur $\mathbb{Q}$) des sous-espaces totalement isotropes W de dimension n de V, qui est munie du fibré en droites ample tautologique $\omega_{\mathrm{Fl}} = (\bigwedge^n W)^*$. On note $\mathscr{F}\!\ell$ l'espace adique sur $\mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p)$ associé à Fl, et $\omega_{\mathscr{F}\!\ell}$ le fibré en droites sur $\mathscr{F}\!\ell$ correspondant à ω_{Fl}.

Enfin, on note $\mathbb{Q}_p^{cycl}$ le complété de $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ (qui est l'extension de $\mathbb{Q}_p$ engendrée par toutes les racines de 1 d'ordre une puissance de p), et $\mathbb{Z}_p^{cycl}$ son anneau des entiers. Notons que $\mathbb{Q}_p^{cycl}$ est un corps perfectoïde.

Le théorème suivant est l'un des résultats centraux de l'article [Sch3].

[19] et même sur $\mathbb{Z}_p$ si $K = \mathbf{G}(\mathbb{Z}_p)K^p$ avec $K^p \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_f{}^p)$

Théorème 4.1. — *(théorèmes III.1.2 et III.3.17 de* [Sch3]*) On fixe un sous-groupe compact ouvert assez petit K^p de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f{}^p)$.*

(i) *Il existe un espace perfectoïde $\mathcal{X}^*_{\Gamma(p^\infty)K^p} = \mathcal{X}^*_{\Gamma(p^\infty)}$*[20] *sur $\mathbb{Q}_p^{cycl}$, unique à isomorphisme unique près, tel que*

$$\mathcal{X}^*_{\Gamma(p^\infty)K^p} \sim \varprojlim_{K_p} \mathcal{X}^*_{K_pK^p},$$

où K_p parcourt l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$. [21]

(ii) *On a une application des périodes de Hodge-Tate $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $\pi_{HT} : \mathcal{X}^*_{\Gamma(p^\infty)K^p} \longrightarrow \mathscr{F}\!\ell$, qui commute avec tous les opérateurs de Hecke hors de p,*[22] *pour l'action triviale de ces opérateurs sur $\mathscr{F}\!\ell$.*

(iii) *On a un isomorphisme canonique $\omega = \pi^*_{HT}\omega_{\mathscr{F}\!\ell}$.*

(iv) *On a un recouvrement de $\mathscr{F}\!\ell$ par des ouverts affinoïdes U* [23] *tels que :*
- *$V = \pi^{-1}_{HT}(U)$ est perfectoïde affinoïde;*
- *pour tout $K_p \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$ assez petit, il existe $V_{K_p} \subset \mathcal{X}^*_{K_pK^p}$ d'image inverse V dans $\mathcal{X}^*_{\Gamma(p^\infty)K^p}$;*
- *le morphisme suivant est d'image dense :*

$$\varinjlim_{K_p} H^0(V_{K_p}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^*_{K_pK^p}}) \longrightarrow H^0(V, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^*_{K^p}}).$$

De plus, le théorème ci-dessus s'étend à toutes les variétés de Shimura de type Hodge (théorème IV.1.1 de [Sch3]), en particulier aux variétés de Shimura de type PEL.

La présence du bord de $\mathcal{X}^*_K$ cause quelques problèmes techniques (dont la plupart sont traités dans les sections II.2 et II.3 de [Sch3]). Nous allons donner une esquisse de preuve qui ignore ces problèmes.

On fixe $K^p \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_f{}^p)$, et on note, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\Gamma_0(p^m) = \{\gamma \in \mathbf{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p) | \gamma = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mod p^m \text{ et } \det(\gamma) = 1 \mod p^m\},$$

$$\Gamma(p^m) = \{\gamma \in \mathbf{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p) | \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod p^m.\}$$

Dans la première partie de la preuve, on prouve (i) pour la limite sur les $K_p = \Gamma_0(p^m)$ et dans un voisinage du lieu anticanonique. Expliquons ce que ceci signifie.

Soit $A \longrightarrow S$ un schéma abélien sur un schéma S de caractéristique p. Si $A^{(p)}$ est le changement de base de $A \longrightarrow S$ par le morphisme de Frobenius absolu de S, alors il existe une unique isogénie $V : A^{(p)} \longrightarrow A$ (appelée *Verschiebung*) dont le composé (dans les deux sens) avec le morphisme de Frobenius relatif $A \longrightarrow A^{(p)}$ est la multiplication

(20) voir plus bas pour l'explication du "$\Gamma(p^\infty)$"

(21) Voir la définition 2.4.1 de [SW] pour $\sim$. En particulier, d'après le théorème 2.4.7 de [SW], ceci implique que le topos étale $\mathcal{X}^*_{\Gamma(p^\infty)K^p,\text{ét}}$ est la limite projective des $\mathcal{X}^*_{K_pK^p,\text{ét}}$.

(22) c'est-à-dire donné par des $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ de composante en p égale à 1

(23) explicites, ce sont les $\mathscr{F}\!\ell_J$ définis plus bas

par p. Cette isogénie induit un morphisme $V^* : \omega_{A/S} \longrightarrow \omega_{A^{(p)}/S} = \omega_{A/S}^{\otimes p}$,[24] c'est-à-dire une section globale $\mathrm{Ha}(A/S)$ de $\omega_{A/S}^{\otimes(p-1)}$, appelée *invariant de Hasse de A*. Rappelons que $\mathrm{Ha}(A/S)$ est inversible si et seulement si A est ordinaire [25] (lemme III.2.5 de [Sch3]). L'invariant de Hasse permet donc de mesurer à quel point A est loin d'être ordinaire.

Dans la suite, si on écrit p^ε, avec $\varepsilon \in [0,1[$, on supposera toujours que ε est dans l'image de $\mathbb{Z}_p^{cycl}$ par la valuation p-adique, et p^ε sera un élément (quelconque) de $\mathbb{Z}_p^{cycl}$ de valuation ε.

On note $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\mathbf{G}(\mathbb{Z}_p)K^p}$ (la variété de Shimura de niveau trivial en p). Pour ε comme ci-dessus, on définit un ouvert $\mathcal{X}(\varepsilon)$ par la condition $|\mathrm{Ha}| \geq |p^\varepsilon|$ (où on prend l'invariant de Hasse de la variété abélienne universelle). Pour que cela ait un sens, on doit d'abord définir $\mathcal{X}(\varepsilon)$ sur un modèle entier de $\mathcal{X}$ (qui existe car on a pris le niveau trivial en p) en utilisant un relèvement local de l'invariant de Hasse, et montrer que le résultat ne dépend pas de ce relèvement; voir la définition III.2.11 et le lemme III.2.12 de [Sch3]. On note aussi $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ l'espace adique associé au schéma abélien universel, et $\mathcal{A}(\varepsilon) = \mathcal{A} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}(\varepsilon)$. Si $K_p \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$ est quelconque, on note $\mathcal{X}_{K_pK^p}(\varepsilon) = \mathcal{X}_{K_pK^p} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}(\varepsilon)$.

On fixe ε et $m \in \mathbb{N}$. Alors, sur les modèles entiers, le schéma abélien universel $\mathcal{A}(p^{-m}\varepsilon) \longrightarrow \mathcal{X}(p^{-m}\varepsilon)$ admet un sous-groupe canonique de niveau m, c'est-à-dire un sous-groupe C_m du groupe des points de p^m-torsion qui est égal à $\mathrm{Ker}(F^m)$ modulo $p^{1-\varepsilon}$ (F est le Frobenius absolu); voir le (ii) du théorème III.2.14 de [Sch3]. Comme $X_{\Gamma_0(p^m)\mathrm{K}^p}$ paramètre les variétés abéliennes (principalement polarisées) A munies d'une structure de niveau K^p et d'un sous-groupe totalement isotrope de $A[p^m]$, l'existence de C_m donne un morphisme $\mathcal{X}(p^{-m}\varepsilon) \longrightarrow \mathcal{X}_{\Gamma_0(p^m)}$. Scholze prouve alors les résultats suivants (théorème III.2.14(iii),(iv) et lemme III.2.16 de [Sch3]) :

(a) Pour tout $m \geq 1$, on a un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}(p^{-m-1}\varepsilon) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X}_{\Gamma_0(p^{m+1})K^p} \arrow[d] \\ \mathcal{X}(p^{-m}\varepsilon) \arrow[r] & \mathcal{X}_{\Gamma_0(p^m)K^p} \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont celles définies ci-dessus, la flèche verticale de droite est la projection canonique et la flèche verticale de gauche est un relèvement du Frobenius.

(b) L'image $X_{\Gamma_0(p^m)K^p}(\varepsilon)_a$ du morphisme $\mathcal{X}(p^{-m}\varepsilon) \longrightarrow \mathcal{X}_{\Gamma_0(p^m)}$ est un sous-espace ouvert et fermé de $\mathcal{X}_{\Gamma^0(p^m)K^p}(\varepsilon)$, défini par la condition que $D[p] \cap C_1 = \{0\}$, où D est le sous-groupe totalement isotrope donné par la structure de niveau $\Gamma_0(p^m)$.[26] De plus, $X_{\Gamma_0(p^m)K^p}(\varepsilon)_a$ est affinoïde pour m assez grand.

---

[24] $\omega_{A/S} = \wedge^{\dim(A/S)}(\Omega^1_{A/S})$

[25] c'est-à-dire que $A[p](x)$ a exactement $p^{\dim(A/S)}$ éléments pour tout point géométrique x de S

[26] Le "a" signifie "anticanonique".

On déduit des résultats ci-dessus qu'il existe un espace perfectoïde affinoïde $\mathcal{X}_{\Gamma_0(p^\infty)}(\varepsilon)_a$ tel que

$$\mathcal{X}_{\Gamma_0(p^\infty)}(\varepsilon)_a \sim \varprojlim_m \mathcal{X}_{\Gamma_0(p^m)K^p}(\varepsilon)_a.$$

La deuxième étape consiste à passer au niveau $\Gamma(p^m)$, afin d'obtenir un espace affinoïde perfectoïde $\mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)}(\varepsilon)_a$ tel que

$$\mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)}(\varepsilon)_a \sim \varprojlim_m \mathcal{X}_{\Gamma(p^m)K^p}(\varepsilon)_a.$$

La seule difficulté vient du fait que les morphismes $\mathcal{X}^*_{\Gamma(p^m)K^p} \longrightarrow \mathcal{X}^*_{\Gamma_0(p^m)K^p}$ ne sont pas étales au bord. Voir la section III.2.5 de [Sch3] pour les détails.

Pour tout espace adique $\mathcal{Y}$, on note $|\mathcal{Y}|$ l'espace topologique sous-jacent. Soit

$$|X_{\Gamma(p^\infty)}| = \varprojlim_m |\mathcal{X}_{\Gamma(p^m)K^p}|.$$

On a trouvé un ouvert $|\mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)}(\varepsilon)_a|$ de cet espace dont chaque point admet un voisinage (venant d'un) perfectoïde affinoïde. Notons que le groupe $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$ agit de manière continue sur $|\mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)}|$, et que la condition “avoir un voisinage perfectoïde affinoïde” est stable par cette action. L'idée est maintenant de montrer que les $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$-translatés de $|\mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)}(\varepsilon)_a|$ recouvrent $|\mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)}|$. Pour cela, Scholze utilise le morphisme des périodes de Hodge-Tate.

Si A est une variété abélienne sur une extension complète et algébriquement close C de $\mathbb{Q}_p$, la suite spectrale de Hodge-Tate (voir par exemple le théorème 3.20 de [Sch2]) donne une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow (\operatorname{Lie} A)(1) \longrightarrow T_pA \otimes_{\mathbb{Z}_p} C \longrightarrow (\operatorname{Lie} A^*)^* \longrightarrow 0,$$

où T_pA est le module de Tate p-adique de A. Si A vient d'un point de $|\mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)}|$, alors on a un isomorphisme $T_pA \simeq \mathbb{Z}_p^{2n}$ (donné par la structure de niveau infinie en p), donc la suite exacte ci-dessus définit un point de $\mathscr{F}\!\ell(C)$. On obtient ainsi une application $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $|\pi_{HT}| : |\mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)}| \longrightarrow |\mathscr{F}\!\ell|$, dont on montre qu'elle est continue en regardant ce qui se passe sur des voisinages pro-étales perfectoïdes des points (lemme III.3.4 de [Sch3]). En effet, la trivialisation du module de Tate p-adique T_pA donnée par la structure de niveau infinie en p existe en fait sur des voisinages pro-étales des points de la variété de Shimura perfectoïde, [27] ce qui permet, sur un tel voisinage, de définir une filtration de Hodge-Tate relative, et donc de montrer que le morphisme de Hodge-Tate est un morphisme d'espaces adiques (et en particulier continu).

On a le plongement de Plücker $\mathscr{F}\!\ell \subset \mathbb{P}^{\binom{2n}{n}-1}$ (défini en envoyant W sur $\wedge^n W$). On note s_J les coordonnées homogènes sur le but de ce plongement, où J parcourt les sous-ensembles de $\{1, \dots, 2n\}$ de cardinal n. Si on fixe un tel J, on a un ouvert affinoïde $\mathscr{F}\!\ell_J$ de $\mathscr{F}\!\ell$, défini par la condition $|s_{J'}| \leq |s_J|$, pour tout J'.

[27] Il est ici important de disposer de la topologie pro-étale. En effet, sur un voisinage étale, on ne pourrait obtenir que des trivialisations des groupes de points de torsion $A[p^N]$.

En utilisant les résultats de son article [SW] avec Weinstein (plus précisément, le théorème B de cet article), Scholze montre que l'image inverse de $\mathscr{F}\ell(\mathbb{Q}_p)$ par l'application $|\pi_{HT}|$ est le lieu ordinaire (lemme III.3.6 de [Sch3]), puis qu'il existe un voisinage ouvert U du point $x = 0^n \oplus \mathbb{Q}_p^n$ de $\mathscr{F}\ell$ tel que $|\pi_{HT}|^{-1}(U) \subset |\mathcal{X}_{\Gamma_0(p^\infty)}(\varepsilon)_a|$ (pour $\varepsilon > 0$ convenable). Or, si $\gamma \in \mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$ est l'élément diagonal $(p, \dots, p, 1, \dots, 1)$, alors $\gamma^N \mathscr{F}\ell_{\{n+1,\dots,2n\}} \subset U$ pour N assez grand. Comme $\mathbf{G}(\mathbb{Z}_p).\mathscr{F}\ell_{\{n+1,\dots,2n\}} = \mathscr{F}\ell$, on en déduit que $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p).U = \mathscr{F}\ell$, ce qui permet de construire un “atlas perfectoïde” de $|\mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)}|$, donc d'obtenir l'espace perfectoïde $\mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)}$ (corollaire III.3.11 de [Sch3]). Une fois que l'on a $\mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)}$, il est assez facile de montrer que $|\pi_{HT}|$ vient d'un morphisme d'espaces adiques $\pi_{HT} : \mathcal{X}_{\Gamma(p^\infty)} \longrightarrow \mathscr{F}\ell$ (et un peu moins facile de montrer que ce morphisme s'étend au bord, voir les corollaires III.3.12 et III.3.16 de [Sch3]).

5. COHOMOLOGIE COMPLÉTÉE ET FAUX INVARIANTS DE HASSE

5.1. Cohomologie complétée

On utilise les notations de la section précédente, et on fixe toujours un sous-groupe ouvert compact (assez petit) K^p de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f{}^p)$. Rappelons que la cohomologie complétée de la variété de Shimura de $\mathbf{G}$ en niveau modéré, dont la définition est due à Calegari et Emerton ([CE]), est donnée par la formule :

$$\widetilde{H}^i_{c,K^p} = \varprojlim_m \varinjlim_{K_p} H^i_c(X^{\mathbf{G}}_{K_pK^p}, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}).$$

C'est un $\mathbb{Z}_p$-module p-adiquement complet, qui admet une action de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p) \times \mathcal{H}^S$, pour tout ensemble fini de nombres premiers S tel que K^p soit hyperspécial en dehors de S.[28] On fixe un tel S.

Remarque 5.1. — La cohomologie complétée permet de définir une notion assez générale de “représentation automorphe p-adique” pour un groupe réductif quelconque (c'était d'ailleurs l'une des motivations de Calegari et Emerton).

On note aussi, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\widetilde{H}^i_{c,K^p}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) = \varinjlim_{K_p} H^i_c(X^{\mathbf{G}}_{K_pK^p}, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}).$$

Les résultats des sections 3 et 4 permettent de montrer sans trop de peine le résultat suivant :

[28] Bien sûr, H^i_{c,K^p} admet en fait une action de toute l'algèbre de Hecke modérée de niveau K^p.

Théorème 5.2. — *(théorème IV.2.1 de* [Sch3]*) Soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{X}^*_{\Gamma(p^\infty)K^p}}$ l'idéal du bord, et $\mathcal{I}^+ = \mathcal{I} \cap \mathcal{O}^+_{\mathcal{X}^*_{\Gamma(p^\infty)K^p}}$. Soit C une extension complète et algébriquement close de $\mathbb{Q}_p$.*

Alors on des presque isomorphismes naturels

$$\widetilde{H}^i_{c,K^p}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}} \mathcal{O}^a_C/p^m \simeq H^i(\mathcal{X}^*_{\Gamma(p^\infty)K^p}, \mathcal{I}^{+a}/p^m),$$

compatibles avec l'action de $\mathcal{H}^S$.[29]

Remarque 5.3. — En particulier, on peut voir la cohomologie complétée comme la cohomologie étale de la variété de Shimura perfectoïde, ce qui en donne une interprétation naturelle.

5.2. Faux invariants de Hasse

On a presque fini la preuve du théorème 2.2, ou de sa version plus précise, le théorème IV.3.1 de [Sch3], qui dit, en gros, que, si on fixe $m \geq 1$, alors tout caractère de $\mathcal{H}^S$ qui apparaît dans un $\widetilde{H}^i_{c,\mathrm{K}^p}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ apparaît aussi dans un $H^0(\mathcal{X}^*_{K_pK^p}, \omega^{mk} \otimes \mathcal{I})$, pour un $K_p \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$ compact ouvert (variable) et un entier $k \geq 1$ (variable aussi). Ici, $\mathcal{I}$ dénote l'idéal du bord (comme plus haut en niveau infini).

Pour finir la preuve, il faut pouvoir passer des groupes $H^i(\mathcal{X}^*_{\Gamma(p^\infty)K^p}, \mathcal{I}^+/p^m)$ (qui sont en niveau infini et en degré cohomologique quelconque) aux groupes $H^0(\mathcal{X}^*_{K_pK^p}, \omega^{mk} \otimes \mathcal{I})$.

On utilise le recouvrement de $\mathcal{X}^*_{\Gamma(p^\infty)K^p}$ par les ouverts $\mathcal{V}_J := (\pi_{HT})^{-1}(\mathscr{F}\ell_J)$ donné par le (iv) du théorème 2.2. Comme les $\mathcal{V}_J$ sont affinoïdes perfectoïdes (et grâce à une propriété technique du bord, voir le (ii) du théorème IV.1.1 de [Sch3]), la cohomologie de $\mathcal{I}^+/p^m$ sur ces ouverts est presque concentrée en degré 0. De plus, comme π_{HT} est équivariant pour les opérateurs de Hecke en dehors de p (agissant trivialement sur $\mathscr{F}\ell$), les ouverts $\mathcal{V}_J$ sont stables par ces opérateurs, donc $\mathcal{H}^S$ agit encore sur les $H^i(\mathcal{V}_J, \mathcal{I}^+/p^m)$.

On utilise la deuxième partie du point (iv) du théorème 2.2 pour montrer que tout caractère de $\mathcal{H}^S$ apparaissant dans un $H^0(\mathcal{V}_J, \mathcal{I}^+/p^m)$ apparaît en fait dans un $H^0(\mathcal{V}_{J,K_p}, \mathcal{I}^+/p^m)$, où $K_p \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$ est assez petit et $\mathcal{V}_{J,K_p} \subset \mathcal{X}^*_{K_pK^p}$ est un ouvert affinoïde d'image inverse $\mathcal{V}_J$ dans $\mathcal{X}^*_{\Gamma(p^\infty)K^p}$.

Il faut encore montrer comment étendre les sections de $\mathcal{I}^+/p^m$ sur $\mathcal{V}_{J,K_p}$ qui sont vecteurs propres pour $\mathcal{H}^S$ à $\mathcal{X}^*_{K_pK^p}$ tout entier sans changer les valeurs propres. La méthode classique consiste à multiplier ces sections propres par une puissance assez grande de l'invariant de Hasse. Ici, on utilise plutôt les "faux invariants de Hasse", qui sont des éléments de $H^0(\mathcal{V}_{J,K_p}, \omega)$ obtenus par pullback de sections bien choisies dans $H^0(\mathscr{F}\ell_J, \omega_{\mathscr{F}\ell})$ (et par descente à un niveau fini assez petit K_p); voir le lemme II.1.1 et la page 72 de [Sch3]. Le fait que la multiplication par ces faux invariants de Hasse ne change pas les valeurs propres de $\mathcal{H}_S$ résulte de la propriété d'équivariance de π_{HT}.

[29] voir l'énoncé du théorème IV.2.1 de [Sch3] pour la définition de cette action

6. QUELQUES AUTRES APPLICATIONS

Indiquons deux autres applications des résultats de [Sch3]. (Cette liste d'applications ne se veut en aucun cas exhaustive.)

6.1. Cohomologie complétée

Le théorème 5.2 donne une formule pour la cohomologie complétée de la section 5.1. En utilisant ce théorème et le fait que les espaces topologiques sous-jacents aux $\mathcal{X}^*_{K_pK^p}$ sont de dimension cohomologique $\leq d$, où $d = n(n+1)/2$ est la dimension des variétés algébriques $X_{K_pK^p}$, Scholze en déduit que $\widetilde{H}^i_{c,K^p} = 0$ pour $i > d$, puis une grande partie de la conjecture 1.5 de [CE] (corollaire IV.2.3 de [Sch3]). (30)

6.2. Modèles entiers étranges

Les faux invariants de Hasse de la section 5.2 permettent de définir des modèles entiers jusqu'ici inconnus des variétés de Shimura de type Hodge. Dans le preprint [PS], Pilloni et Stroh ont étudié ces modèles entiers et les ont utilisés pour construire des représentations galoisiennes associées à des représentations automorphes non nécessairement cohomologiques(31) du groupe $\mathbf{G}$ définissant les variétés de Shimura.

RÉFÉRENCES

[Ar] J. Arthur – *The endoscopic classification of representations. Orthogonal and symplectic groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 61. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[As1] A. Ash – *Galois representations attached to mod p cohomology of GL(n,Z)*, Duke Math. J. 65 (1992), no. 2, 235-255.

[As2] A. Ash – *Galois representations and cohomology of GL(n,Z)*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1989-90, 9-22, Progr. Math., 102, 1992.

[BB] W. L. Baily et A. Borel – *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains*, Ann. of Math. (2) 84 1966 442-528.

[BLGGT] T. Barnet-Lamb, T. Gee, D. Geraghty, et R. Taylor – *Potential automorphy and change of weight*, Ann. of Math. (2) 179 (2014), no. 2, 501-609.

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne – *Faisceaux pervers*, Analyse et topologie sur les espaces singuliers, I (Luminy, 1981), 5-171, Astérisque, 100, Soc. Math. France, Paris, 1982.

[BR] D. Blasius et J. Rogawski – *Tate classes and arithmetic quotients of the two-ball*, The zeta functions of Picard modular surfaces, 421-444, Univ. Montréal, 1992.

(30)Là encore, les résultats cités sont en fait vrais pour toutes les variétés de Shimura de type Hodge, en particulier celles de type PEL.

(31)mais apparaissant dans la cohomologie cohérente de fibrés vectoriels automorphes

[BS] A. Borel et J.-P. Serre – *Corners and arithmetic groups*, Comment. Math. Helv. 48 (1973), 436-491.

[BG] K. Buzzard et T. Gee – *The conjectural connections between automorphic representations and Galois representations*, arxiv:1009.0785v2

[BJ] A. Borel et H. Jacquet – *Automorphic forms and automorphic representations*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Automorphic forms, representations and L-functions, Part 1, (1979), 189-207.

[CE] F. Calegari et M. Emerton – *Completed cohomology-a survey*, Non-abelian fundamental groups and Iwasawa theory, 239-257, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 393, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.

[Ca] P. Cartier – *Representations of p-adic groups: a survey*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Automorphic forms, representations and L-functions, Part 1, (1979), 111-155.

[CF] C.-L. Chai et G. Faltings – *Degeneration of abelian varieties. With an appendix by David Mumford*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 22. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Cl1] L. Clozel – *Motifs et formes automorphes: applications du principe de fonctorialité*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), 77-159.

[Cl2] L. Clozel – *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de GL(n)*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 73 (1991), 97-145.

[CHLB] L. Clozel, M. Harris, J.-P. Labesse et B.-C. Ngô (éditeurs) – *Stabilization of the Trace Formula, Shimura Varieties, and Arithmetic Applications, 1*, International Press, Somerville, MA, 2011, et `http://fa.institut.math.jussieu.fr/node/45` pour le second volume.

[Fl] D. Flath – *Decomposition of representations into tensor products*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Automorphic forms, representations and L-functions, Part 1, (1979), 179-183.

[Fr] J. Franke – *Harmonic analysis in weighted L^2-spaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 31 (1998), no. 2, 181-279.

[Fo] J.-M. Fontaine – *Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids (d'après Peter Scholze).* (French. French summary), Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012. Exposé 1057, Astérisque No. 352 (2013), , 509-534.

[FM] J.-M. Fontaine et B. Mazur – *Geometric Galois representations*, Elliptic curves, modular forms, and Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), 41-78, Ser. Number Theory, I, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[G] B. Gross – *On the Satake isomorphism*, Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996), 223-237, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 254, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[HLTT] M. Harris, K.-W. Lan, R. Taylor et J. Thorne – *On the rigid cohomology of certain Shimura varieties*, `http://www.math.ias.edu/~rtaylor/rigcoh.pdf`.

[KMSW] T. Kaletha, A. Minguez, S. W. Shin et P.-J. White – *Endoscopic Classification of Representations: Inner Forms of Unitary Groups*, `http://arxiv.org/abs/1409.3731`

[K1] R. Kottwitz – *Shimura varieties and λ-adic representations*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), 161-209.

[K2] R. Kottwitz – *Points on some Shimura varieties over finite fields*, J. Amer. Math. Soc. 5 (1992), no. 2, 373-444.

[L] R. Langlands, *On the notion of an automorphic representation*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Automorphic forms, representations and L-functions, Part 1, (1979), 203-207.

[MW] C. Mœglin et J.-L. Waldspurger – *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein*, Progress in Mathematics 113, Birkhäuser (1994).

[M] C. P. Mok – *Endoscopic Classification of representations of Quasi-Split Unitary Groups*, Mem. Amer. Math. Soc. 235 (2015), no. 1108.

[GIT] D. Mumford, J. Fogarty et F. Kirwan – *Geometric invariant theory. Third edition*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)], 34. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[P-S] I.I. Piatetski-Shapiro – *Multiplicity one theorems*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Automorphic forms, representations and L-functions, Part 1, (1979), 209-212.

[PS] V. Pilloni et B. Stroh – *Cohomologie cohérente et représentations galoisiennes*, `http://www.math.univ-paris13.fr/~stroh/coco.pdf`

[P] R. Pink – *On the calculation of local terms in the Lefschetz-Verdier trace formula and its application to a conjecture of Deligne*, Ann. of Math. (2) 135 (1992), no. 3, 483-525.

[Sch1] P. Scholze – *p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties*, Forum Math. Pi 1 (2013), e1, 77 pp.

[Sch2] P. Scholze – *Perfectoid spaces: a survey*, Current developments in mathematics 2012, 193-227, Int. Press, Somerville, MA, 2013.

[Sch3] P. Scholze, *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*, à paraître aux Annals of Math.

[SW] P. Scholze et J. Weinstein – *Moduli of p-divisible groups*, Camb. J. Math. 1 (2013), no. 2, 145-237.

[T] J. Tits – *Reductive groups over local fields*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Automorphic forms, representations and L-functions, Part 1, (1979), 29-69.

[VZ] D. Vogan et G. Zuckerman – *Unitary representations with nonzero cohomology*, Compositio Math. 53 (1984), no. 1, 51-90.

Sophie MOREL

Department of Mathematics
Princeton University
Fine Hall
Washington Road
Princeton, NJ 08544, U.S.A.
E-mail : smorel@math.princeton.edu