مقاله

می‌دانم که می‌دانی: معماهای مبتنی بر معرفت مشترک

سوفی مورل *، محمد شهریاری **

در یک عصر خنک مردادماه، در تابستانی که گذشت، ما نویسندگان این یادداشت برای گردش به کوه سرخ‌فام عینالی در حومه تبریز رفتیم. میان راه تصمیم گرفتیم درباره معماهای منطقی صحبت کنیم. نقش چنین معماهایی در توسعه بخش‌هایی از ریاضیات بر همگان واضح است. به عنوان مثال، آنان که با مبانی منطق ریاضی آشنا باشند می‌دانند که معمای دروغگو چگونه باعث پیدایش نظریه صدق تارسکی و نیز قضیه ناتمامیت گودل شده است.

صحبت ما در هنگام صعود به کوه به معمای جزیره چشم آبی‌ها کشیده شد. صورت معما چنین است:

در یک جزیره دور، در جایی از اقیانوس، مردمانی زندگی می‌کردند با هوش سرشار، راستگو و به غایت منطق‌مدار. رنگ چشم مردم این جزیره آبی بود یا سبز. هر کس می‌توانست چشمان دیگر مردمان جزیره را مشاهده کند اما به علت فقدان هر نوع آینه یا سطح صیقلی، کسی قادر به دیدن رنگ چشمان خود نبود. اهالی جزیره به دینی اعتقاد داشتند که هر کس را از دانستن رنگ چشم خویش منع می‌کرد. به همین سبب اهالی جزیره هرگز با دیگران درباره رنگ چشم آن‌ها سخن نمی‌گفتند. طبق دستور دین، هر کس که متوجه آبی بودن چشم خود می‌شد می‌بایست در اولین شب پیش رو از جزیره می‌رفت. اگر کسی از جزیره می‌رفت، تمام دیگر اهالی رفتن او را می‌فهمیدند.

روزی بیگانه‌ای به این جزیره سفر کرد و مدتی مهمان مردمان جزیره شد. هنگام وداع، بیگانه از مهمان‌نوازی مردم جزیره تشکر کرد و چون با اعتقادات ایشان چندان آشنا نبود چنین گفت: چه جزیره زیبایی و چه مردمان خوبی! برای من بسیار جالب بود که در میان شما کسانی با چشم آبی دیدم و حال آن‌که پیش از این در سایر جزیره‌های این حوالی هرگز فردی با چشم آبی ندیده بودم.

بیگانه چنین گفت و رفت. هر یک از اهالی جزیره در مراسم بدرقه حضور داشت و سخن بیگانه را شنید. آن‌ها می‌دانستند که بیگانه مردی راستگو است.

بیگانه رفت و شب نخست اتفاق خاصی در جزیره رخ نداد. شب دوم، شب سوم، و سایر شب‌ها نیز طی شد. اما در شب صدم تمام اهالی همزمان جزیره را ترک کردند.

دیگران که احوالات مردم جزیره و ماجرای فوق را شنیده‌اند از یکدیگر می‌پرسند که آیا چه شد تمام مردمان جزیره در شب صدم ناگهان جزیره را ترک گفتند؟

دو جواب برای این سؤال موجود است. عده‌ای معتقدند تعداد اهالی جزیره صد تن بوده و همگی چشم آبی داشته‌اند.

آنان برای اثبات ادعای خود چنین استدلال می‌کنند: فرض کنیم k نشان‌دهنده تعداد افراد چشم آبی جزیره باشد. ادعا می‌کنیم که در شب k ـ ام همه این افراد جزیره را ترک می‌کنند. اثبات این ادعا با استقراء روی k است. نخست فرض کنیم $k = ۱$. تنها فرد چشم آبی جزیره پس از شنیدن آن سخن از بیگانه، با خود می‌گوید: من می‌بینم که چشم دیگران سبز است. پس مقصود بیگانه به یقین من بوده‌ام. سپس وی در شب اول جزیره را ترک می‌کند.

حال فرض کنیم $k \geq ۲$ و نیز فرض کنیم و حکم برای $k - ۱$ درست باشد. شب نخست هیچ‌کدام از افراد چشم آبی جزیره را ترک نخواهد کرد، چون هر کدام با دیدن $k - ۱$ شخص چشم آبی دیگر منتظر رفتن ایشان در شب $(k - ۱)$ ـ ام خواهد بود. اما چون در آن شب کسی جزیره را ترک نمی‌کند، هر کدام از آن k شخص پیش خود چنین می‌اندیشد: اگر در جزیره ما دقیقاً $k - ۱$ تن با چشم آبی موجود می‌بود پس طبق فرض استقراء می‌بایست شب گذشته همگی از جزیره می‌رفتند. اما نرفته‌اند! چرا؟ چون به یقین فردی دیگر هم با چشمان آبی وجود دارد. آن فرد دیگر کیست؟ اگر جز من کسی دیگر بود که من او را نیز مشاهده می‌کردم. پس لزوماً آن فرد من هستم.

تمام افراد چشم آبی جزیره در آن ساعت چنین می‌اندیشند و متوجه رنگ آبی چشمان خود می‌شوند. بنابراین در شب k ـ ام جزیره را ترک می‌گویند. حال چون واقعه ترک جزیره در شب صدم رخ داده و طبق فرض مسأله تمام اهالی جزیره آن‌جا را ترک کرده‌اند پس نتیجه می‌توان گرفت که تعداد مردم جزیره صد تن بوده و همگی چشمان آبی داشته‌اند.

اینک، اجازه دهید جواب دوم برای معمای فوق را بخوانیم. برخی نیز اثبات استقرایی فوق را قبول ندارند. آن‌ها معتقدند در اصل نباید کسی جزیره را ترک کند. اگر در این جزیره صد تن با چشمان آبی موجود باشد پیش از آن‌که مرد بیگانه درباره وجود شخص یا اشخاصی با چشم آبی در آن جزیره سخنی گفته باشد خود آن مردم این حقیقت را می‌دانند و سخن بیگانه چیزی به دانش آن‌ها اضافه نمی‌کند. پس چرا باید آن‌ها جزیره را ترک کرده باشند؟

در ادامه این یادداشت، قصد داریم نشان دهیم که در حقیقت نظر دوم درست نیست و اگر دقیق باشیم متوجه می‌شویم که آن سخن از مرد بیگانه واقعاً به دانسته‌های مردم جزیره چیزی افزوده و همان چیز موجب مهاجرت دسته جمعی ایشان شده است. برای توضیح دقیق آنچه رخ داده، به منطق موجهات متوسل می‌شویم.

فرض کنید φ یک جمله باشد. اگر A و B دو شخص باشند که

از درستی φ خبر دارند اما حق نداشته باشند که درباره آن باهم سخن بگویند ممکن است A نداند که B از صحت φ مطلع است و ممکن است B نداند که A از صحت φ خبر دارد. مثلاً فرض کنیم φ جمله کسی با چشمان آبی وجود دارد باشد. اگر تنها دو تن مثل A و B چشم آبی داشته باشند، آنگاه هر دو تن از قبل می‌دانند که φ درست است اما هیچ‌کدام نمی‌داند که دیگری نیز از صحت φ آگاهی دارد. بنابراین تا زمانی که این راز افشا نشده باشد نه A و نه B منتظر آن نیست که در شب پیش رو کسی جزیره را ترک کند. اما زمانی که صحت φ توسط بیگانه در ملاء عام اعلام شد، A پیش خود می‌اندیشد: حال دیگر B دانسته است که φ درست است. پس اگر چشمان من آبی نباشد B باید متوجه رنگ آبی چشمان خود بشود و او باید امشب جزیره را ترک کند. همزمان B نیز شبیه A فکر می‌کند.

برای تحلیل بیشتر، عملگر وجهی E را چنین تعریف می‌کنیم: جمله $E(\varphi)$ به این معنی است که هر کس می‌داند که φ درست است. توجه کنید که φ و $E(\varphi)$ معادل نیستند. در واقع استلزام $E(\varphi) \to \varphi$ همواره برقرار است، اما ممکن است $\varphi \to E(\varphi)$ درست نباشد. حال بیایید به جمله $E^۲(\varphi) = E(E(\varphi))$ توجه کنیم. معنای این جمله چیست؟ به وضوح این جمله بیان کننده آن است که هرکس می‌داند که هرکس می‌داند که φ درست است. حقیقتی که $E^۲(\varphi)$ حاوی آن است بس بیشتر از محتوای φ است. حال، فرض کنیم $C(\varphi)$ یک خلاصه‌نویسی برای جمله زیر باشد:

$$\forall n \geq ۰ : E^n(\varphi).$$

به زبان ساده $C(\varphi)$ بدان معناست که φ درست است و هر کس این را می‌داند و هر کس می‌داند که هر کس این را می‌داند و هر کس می‌داند که هر کس می‌داند که هر کس این را می‌داند و ... (الی آخر). جمله اخیر، یعنی $C(\varphi)$ را یک معرفت مشترک می‌نامند. تفاوت میان معانی φ و $C(\varphi)$ برای نخستین بار در دهه‌های شصت و هفتاد قرن گذشته توسط فلاسفه و جامعه‌شناسان مورد توجه قرار گرفته است. پس از آن، ریاضی‌دانان و متخصصان علوم کامپیوتر نظری به مدل‌سازی ریاضی برای مفهوم معرفت مشترک پرداخته‌اند.

در مثال جزیره، آنچه حقیقت دارد این است که $k = ۱۰۰$ ولیکن پیش از روز صدم کسی از ایشان این واقعیت را نمی‌داند. پس جمله $E(k = ۱۰۰)$ تا آن موقع صحیح نیست. به جای آن جمله $E(۹۹ \leq k \leq ۱۰۰)$ حتی پیش از سخن گفتن بیگانه درست بوده است. دقت کنید که جمله $E^۲(۹۹ \leq k)$ چنین نبوده اما در عوض $E^۲(۹۸ \leq k)$ درست بوده است. اگر این استدلال را تعقیب کنیم متوجه می‌شویم که قبل از بیانات بیگانه جمله $E^{۱۰۰}(۰ \leq k)$ نیز درست بوده اما تا آن موقع $E^{۱۰۰}(۰ < k)$ صحت نداشته است. آنچه بیگانه در اختیار ساکنان جزیره قرار می‌دهد عبارت است از $C(۰ < k)$. پس بعد از افشاگری بیگانه جمله موجه $E^{۱۰۰}(۰ < k)$ درست است و این است آن چیزی که موجب مهاجرت تمام اهالی جزیره در شب صدم شده است.

چرا این مهاجرت در شب اول رخ نداده است؟ چرا برای رخ دادن این اتفاق باید صد روز منتظر بمانیم؟ برای درک بیشتر آن‌چه در عمل اتفاق می‌افتد به استدلالی اشاره می‌کنیم که مارک وان لیووین[۱۵] در سایت math.stackexchange.com/a/490546 منتشر کرده است. علاقه‌مندان می‌توانند برای مشاهده جزئیات استدلال به سایت فوق مراجعه کنند. فرض کنید $L(i)$ به این معنی باشد: در شب iـ ام کسی جزیره را ترک می‌کند. چون تمام افراد جزیره مهاجرت هر فرد دیگر را می‌بینند و همه این را می‌دانند پس خود جمله $L(i)$ یک معرفت مشترک است. می‌توان نشان داد که جمله زیر هم یک معرفت مشترک است:

$$\forall i \geq ۰ \forall j > ۰ : k = j \wedge \neg L(i) \wedge E(j \leq k) \to L(i + ۱)$$

جمله فوق به این معنی است که اگر تعداد اهالی چشم آبی جزیره j باشد و همه بدانند که تعداد اهالی چشم آبی حداقل j است و اگر در شب iـ ام کسی جزیره را ترک نکند آن‌گاه لزوماً در شب بعد فردی جزیره را ترک خواهد کرد. علاوه بر این، هر کس این را خواهد دانست و هر کس خواهد دانست که دیگران نیز این را می‌دانند و ... . با یک استدلال استقرایی می‌توان جمله زیر را هم ثابت کرد:

$$\forall l \forall j : E^{l+j}(۰ < k) \wedge C(\forall i \leq j : \neg L(i)) \to E^l(j < k).$$

به‌خصوص فرض کنیم $l = ۱$ و $j = ۹۹$. پس داریم

$$E^{۱۰۰}(۰ < k) \wedge C(\forall i \leq ۹۹ : \neg L(i)) \to E(۹۹ < k).$$

پس اگر تا پایان شب ۹۹ کسی از جزیره نرود آن‌گاه همه متوجه می‌شوند که $k > ۹۹$ و به ویژه تمام آن‌هایی که چشم آبی دارند نتیجه می‌گیرند که $k = ۱۰۰$.

داشتن معرفت مشترک در یک بازی می‌تواند تأثیری مهم در نتیجه آن داشته باشد. داستان لباس تازه پادشاه، اثر هانس کریستین آندرسن، شاید معروف‌ترین مثال باشد. در این داستان، همه رعایا می‌دانند که پادشاه عریان است، اما کسی نمی‌داند که آیا دیگران نیز چنین معرفتی دارند. بنابراین تا زمانی که آن کودک فریاد برنیاورده که پادشاه لخت است، همه چیز به خوبی پیش می‌رود.

این یادداشت می توانست همین‌جا به پایان رسد، اگر نویسنده اول در یک صبح سرد اسفند با جان کانووی[۱۶] روبرو نمی‌شد و از ایشان

[۱۵] Leeuwen van Marc

[۱۶] John Horton Conway

نمی‌پرسید که آیا بینشی درباره معرفت مشترک دارند. جان کانووی در پاسخ، معمای دیگری طرح کرد که صورت آن چنین است:

زنی نابینا به اسم زهره سه مرد کاملاً منطقی و راستگو را به یک بازی دعوت می‌کند. نام مردان عبارت است از امید، بهنام و تیرداد. زهره به ایشان می‌گوید: دستیار من روی پیشانی شما سه عدد نامنفی می‌نویسد. من هم سه عدد روی تخته می‌نویسم که یکی از آنها مجموع اعداد روی پیشانی شماست. اما دقت کنید که من از عددهای روی پیشانی شما خبر ندارم و ضمناً نمی‌دانم مجموع آن‌ها چند است. حال من از امید می‌پرسم که آیا می‌داند عدد روی پیشانیش چند است. اگر امید گفت نمی‌دانم به سراغ بهنام می‌روم و همان سؤال را می‌پرسم. اگر بهنام گفت نمی‌دانم به سراغ تیرداد می‌روم و سؤال را تکرار می‌کنم. اگر تیرداد هم گفت نمی‌دانم به امید بر می‌گردم و بازی دوباره از نو شروع می شود. تا یکی از شما نگوید می‌دانم ما اجازه نداریم از این اتاق برویم.

بر اساس گفته کانووی، مهم نیست چه اعدادی روی پیشانی مردان و روی تخته نوشته شده باشد، زیرا همواره راهی وجود دارد که در طی این بازی یکی از مردان (و حتی هر سه مرد) به عدد روی پیشانی خود را پی ببرد.

در نظر اول این معما به معمای جزیره شباهتی ندارد، جز این که همانند آن غیرممکن به نظر می رسد. مثلاً فرض کنیم که دستیار زهره روی پیشانی هر مردی عدد ۲ را نوشته باشد. گیریم که زهره هم روی تخته اعداد ٦، ۷، ۸ را نوشته باشد. امید روی پیشانی بهنام و تیرداد عدد ۲ را می‌بیند و به این نتیجه‌ای می‌رسد که عدد روی پیشانیش باید ۲، ۳ یا ۴ باشد. این است که در پاسخ به زهره می‌گوید: نمی‌دانم. بهنام و تیرداد دچار همین دردسر هستند و بالاجبار نمی‌دانم خواهند گفت. به نظر می‌رسد که سه تا مرد تا ابد چنین پاسخ گویند و هیچکس از اتاق بازی آزاد نشود.

البته کسی که با معمای جزیره آشنا باشد می فهمد که اشکال کار در کجاست: بعد از شنیدن جواب‌های بهنام و تیرداد، امید آگاهی جدیدی می‌یابد: این آگاهی جدید چه می‌تواند باشد جز این که اطلاعات بهنام و تیرداد در حال حاضر کافی نیست تا ایشان عدد روی پیشانی خود را بدانند. مشابهاً با هر جواب منفی بهنام یا تیرداد، امید وضعیت را بهتر می‌فهمد. ولی اگر سعی کنیم از نقطه‌نظر یکی از مردان آن بازی را درک کنیم، استدلال استقرایی به زودی خیلی پیچیده می‌شود. به همین دلیل کانووی، زهره را به بازی اضافه کرده است، چون هر چیزی که زهره بداند معرفت مشترک است[17] با این که حضور زهره برای بازی به هیچ وجه ضروری نیست، اما اگر ما بر اطلاعاتی که زهره دارد تمرکز کنیم می‌توانیم خیلی راحت‌تر معما را حل کنیم.

به‌طور دقیق‌تر، وقتی امید، بهنام و تیرداد به پرسش زهره جواب دهند، یک دور بازی گذشته است. حال مسأله این است که آیا برای عددی صحیح مانند n، بعد از دور n ـ ام یکی از مردان می‌توانند مجموع درست را بفهمند یا نه؟ به عبارت دیگر، آیا برای هر انتخاب برای اعداد روی پیشانی مردان، عدد صحیح n وجود دارد که بعد از دور n ـ ام بازی، یکی از مردان بتواند فقط از اطلاعاتی که زهره دارد مجموع درست را تشخیص دهد؟

برای توضیح ایده حل این معما، فعلاً فرض کنیم که فقط دو مرد (امید و بهنام) در بازی شرکت می‌کنند و تصور کنیم زهره فقط دو عدد روی تخته نوشته است. علاوه بر این فرض کنیم که همه آن اعداد، صحیح نامنفی هستند. فرض کنیم $S_۰$ مجموعه اعدادی است که از نقطه‌نظر زهره ممکن است قبل از شروع بازی روی پیشانی امید و بهنام نوشته شده باشد، یعنی مجموعه $S_۰$ عبارت از آن جفت‌های اعداد صحیح نامنفی است که مجموعشان یکی از اعداد روی تخته باشد. مثلاً اگر زهره در تخته اعداد ۵ و ۷ را نوشته باشد مجموعه $S_۰$ این است:

$$S_۰ = \{(۰,۵),(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱),(۵,۰),(۰,۷),\\ (۱,٦),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(٦,۱),(۷,۰)\}$$

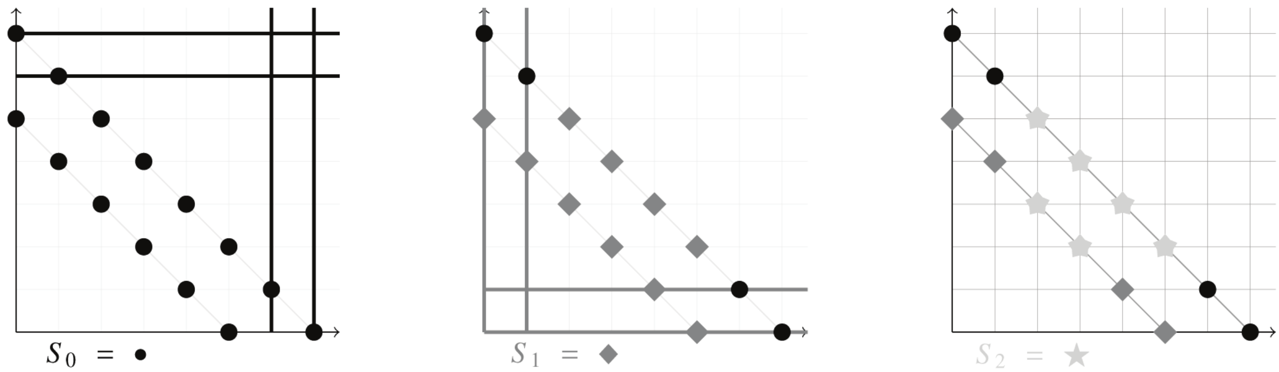
به‌طور مشابه فرض کنیم که S_n مجموعه جفت‌های اعدادی است که از نقطه‌نظر زهره ممکن است بعد از دور n ـ ام بازی روی پیشانی امید و بهنام نوشته شده باشد. چطور می‌شود مجموعه $S_{n+۱}$ را از دانستن مجموعه S_n تعیین کرد؟

به مثالمان برگردیم. در اولین دور بازی، اگر امید ببیند که روی پیشانی بهنام ۷ نوشته شده است فوراً می فهمد که عدد روی پیشانی خودش باید ۰ باشد. مشابهاً اگر ببیند که روی پیشانی بهنام ٦ نوشته شده است بلافاصله می‌فهمد که عدد روی پیشانی خودش باید ۱ باشد. و اگر روی پیشانی بهنام عدد دیگری ببیند نمی‌تواند به هیچ نتیجه‌ای برسد. مشابهاً اگر بهنام ببیند که عدد روی پیشانی امید ۷ یا ٦ است می‌فهمد که روی پیشانی خودش ۰ یا ۱ نوشته شده است وگرنه مجبور می‌شود بگوید نمی‌دانم. یعنی بازی طی اولین دور به پایان می‌رسد اگر و تنها اگر اعداد روی پیشانی دو مرد یا (۰, ۷) یا (۱, ٦) یا (٦, ۱) یا (۷, ۰) باشد. معنای این سخن آن است که بعد از آن اولین دور، اگر بازی به پایان نرسیده باشد زهره متوجه می‌شود که مجموعه زوج‌های اعداد ممکن باقی‌مانده چنین است:

$$S_۰ = \{(۰,۵),(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱),(۵,۰),(۲,۵),\\ (۳,۴),(۴,۳),(۵,۲)\}$$

نه تنها زهره، که حتی دو مرد نیز به این واقعیت آگاه هستند.

[17] ولی عکسش درست نیست.



در دومین دور بازی، اگر امید ببیند که روی پیشانی بهنام ۰ نوشته‌اند می‌تواند بفهمد که روی پیشانی خود ۵ دارد، چون در مجموعه S_1 تنها زوجی که مؤلفه دومش ۰ باشد، جفت $(5,0)$ است. مشابهاً اگر ببیند که روی پیشانی بهنام ۱ نوشته شده است می‌تواند بفهمد که روی پیشانی خودش ۴ نوشته‌اند، چون در مجموعه S_1 تنها جفتی که مُولفه دومش ۱ باشد، جفت $(4,1)$ است. در سایر حالت‌ها امید به هیچ نتیجه‌ای نمی‌رسد چون برای هر زوج دیگر (a,b) در مجموعه S_1 یک زوج متفاوت در S_1 ست که مؤلفه دومش مساوی b باشد. مشابهاً بهنام اگر روی پیشانی امید ۰ یا ۱ را ببیند می‌فهمد که عدد روی پیشانی خودش باید ۵ یا ۴ باشد وگرنه می‌گوید نمی‌دانم. به عبارت دیگر، اگر بازی در دور دوم به پایان نرسد مجموعه جفت‌های اعداد ممکن باقی مانده بعد از آن دور چنین است:

$$S_2 = \{(2,3),(3,2),(2,5),(3,4)(4,3),(5,2)\}$$

اکنون، هم زهره و هم دو مرد به این آگاهی دست یافته‌اند.

به‌طور خلاصه، در دور $(n+1)$ ـ ام بازی، امید می‌تواند مجموع درست را (یا عدد روی پیشانیش را، چون این دو هم ارزند) بفهمد، اگر زوج اعداد (a,b) روی پیشانی مردان چنان باشد که برای هر جفت دیگر (c,d) در S_n، اعداد a و c متفاوت باشند، چون در این وضیعت دانستن b (یعنی عدد روی پیشانی بهنام) برای تعیین a کافی است وگرنه امید مجبور می‌شود بگوید نمی‌دانم. مشابهاً بهنام می‌تواند مجموع درست را بفهمد اگر جفت اعداد (a,b) روی پیشانی مردان چنان باشد که برای هر جفت دیگر (c,d) در S_n، اعداد b و d متفاوت باشد، چون در این وضعیت دانستن a (یعنی عدد روی پیشانی امید) برای تعیین b کافی است وگرنه بهنام مجبور می‌شود بگوید نمی‌دانم. به عبارت دیگر زهره و بازیکنان روشی دارند که با آن می‌توانند مجموعه S_{n+1} را از مجموعه S_n حساب کنند. در مثال ما با استعمال مکرر این استدلال متوجه می‌شویم که $S_3 = \{(2,3),(3,2)\}$ و اگر $n \geq 4$ آنگاه $S_n = \varnothing$. یعنی در حالتی که اعداد روی تخته ۵ و ۷ باشند، و اعداد روی پیشانی مردان هر چه باشد، بازی بعد از حداکثر سه دور به پایان می‌رسد. در حالی که اعداد روی تخته طور دیگر باشند استدلال همین است. باید ثابت کنیم که اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد مجموعه S_n تهی خواهد بود. دو نکته مهم وجود دارد:

(۱) مجموعه S_0 متناهی است، چون S_0 از آن جفت اعداد صحیح نامنفی عبارت است که مجموعشان یکی از دو تا عدد در تخته باشد.

(۲) برای هر n، مجموعه S_{n+1} از S_n اکیداً کوچک‌تر است، یعنی در هر دور بازی زهره دست‌کم یک حل از فهرست حل‌های ممکن برمی‌دارد. این نتیجه‌ای از گزاره ذیل است.

با توجه به این دو نکته واضح خواهد بود که اگر تعداد عناصر S_0 مساوی N باشد بازی نمی‌تواند بیشتر از N دور طول بکشد.

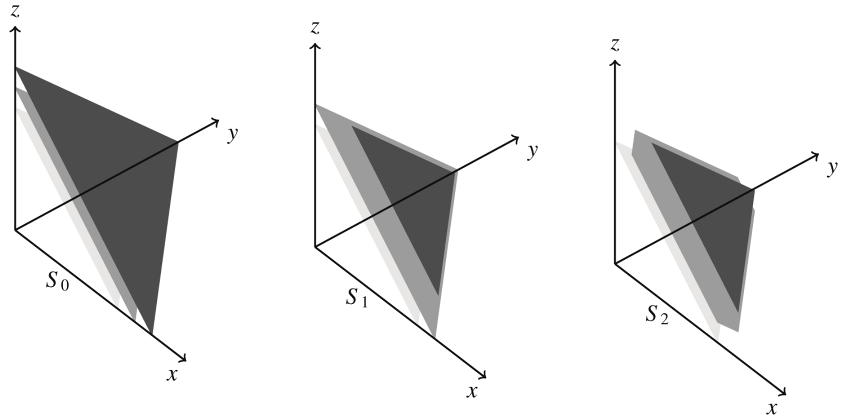
گزاره۱ فرض کنیم S یک مجموعه متناهی از زوج‌های مرتب اعداد (صحیح یا حقیقی) باشد، و به ازای هر زوج (a,b) در S، یا زوج متفاوتی در S موجود باشد که اولین مؤلفه آن a است یا زوج متفاوتی در S موجود باشد که دومین مؤلفه آن b است. در این صورت مجموعه جمع‌های مؤلفه‌های زوج‌ها در S حداقل سه عضو دارد.

برای اثبات این گزاره، یک زوج (a,b) در S انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که a کوچکترین مقدار ممکن باشد. طبق فرض، دست‌کم دو عدد متفاوت b_1 و b_2 وجود دارند که هم (a,b_1) و هم (a,b_2) در S است. چون یکی از آن دو تا عدد از دیگری بزرگ‌تر است و چون ترتیب اهمیتی ندارد می‌توان فرض کرد که b_1 از b_2 بزرگ‌تر است. به خاطر فرض گزاره می‌دانیم که عددی مانند c وجود دارد که c با a متفاوت است و (c,b_1) در S قرار دارد. حال c باید از a بزرگ‌تر باشد (وگرنه ما در اولین مرحله زوج (c,b_1) را انتخاب می‌کردیم)، بنابراین

$$c+b_1 > a+b_1 > a+b_2$$

و این گزاره را ثابت می‌کند. الان برگردیم به وضعیتی که در بازی

سه مرد حضور دارند و سه عدد روی تخته هست. مثل حالت قبل مجموعه حل‌هایی را که از نقطه‌نظر زهره در شروع بازی محتمل است S_0 و مجموعه حل‌های ممکن را که از نقطه‌نظر زهره بعد از دور n ـ ام بازی باقی‌مانده است S_n بنامیم. هر عنصر S_n یک سه‌تایی از اعداد صحیح است. مثلاً اگر روی پیشانی هر مرد ۲ نوشته باشد و اگر روی تخته ۵ و ٦ و ۷ نوشته باشد مجموعه S_0 مجموعه آن سه‌تایی‌ها از اعداد صحیح نامنفی است که مجموع مؤلفه‌های آن‌ها ۵ یا ٦ یا ۷ است.



فرض کنیم $n \geq 1$. بلافاصله قبل از دور n ـ ام بازی، هم امید، هم بهنام و هم تیرداد می‌دانند که حل باید در مجموعه S_{n-1} باشد. در دور n ـ ام بازی، امید می‌تواند مجموع درست را بفهمد اگر سه‌تایی (a, b, c) روی پیشانی مردان چنان باشد که برای هر سه‌تایی دیگر مثل (x, y, z) در S_{n-1}، اعداد a و x متفاوت باشند، چون در این وضعیت دانستن b و c (یعنی اعداد روی پیشانی بهنام و تیرداد) برای تعیین کردن a کافی است. وگرنه امید مجبور می‌شود بگوید نمی‌دانم. به همین روش می‌توان سه‌تایی‌هایی را توصیف کرد که اگر جواب درست یکی از آن‌ها باشد یا بهنام یا تیرداد می‌توانند در دور n ـ ام بازی به آن وضعیت آگاه شوند. در نتیجه زهره می‌تواند مجموعه S_n را از مجموعه S_{n-1} چنین تعیین کند: او هر سه‌تایی (a, b, c) از مجموعه S_{n-1} که یا هیچ سه‌تایی دیگر با مؤلفه اول a در S_{n-1} نیست یا هیچ سه‌تایی دیگر با مؤلفه دوم b در S_{n-1} نیست و یا هیچ سه‌تایی دیگر با مؤلفه سوم c در S_{n-1} نیست را از S_{n-1} انتخاب می‌کند تا S_n ساخته شود.

باید ثابت کنیم که اگر n به اندازه کافی بزرگ بشود مجموعه S_n تهی است، و دوباره کافیست دو نکته ذیل را ثابت کنیم:

(۱) مجموعه S_0 متناهی است، چون S_0 از آن سه‌تایی‌ها از اعداد صحیح نامنفی عبارت است که مجموع مؤلفه‌های آن‌ها یکی از سه تا عدد در تخته باشد.

(۲) برای هر n، مجموعه S_{n+1} از S_n اکیداً کوچک‌تر است، یعنی در هر دور بازی زهره دست‌کم یک حل از فهرست حل‌های ممکن برمی‌دارد. این نتیجه‌ای از گزاره زیر است، که تعمیمی از گزاره۱ می‌باشد.

گزاره ۲. فرض کنیم S یک مجموعه متناهی از سه‌تایی‌های مرتب اعداد (صحیح یا حقیقی) باشد، و فرض کنیم به ازای هر سه‌تایی (a, b, c) در S، یا عنصری متفاوت در S هست که اولین مؤلفه‌اش a، یا عنصری متفاوت در S هست که دومین مؤلفه‌اش b، و یا سه‌تایی متفاوتی در S هست که سومین مؤلفه‌اش c باشد. در این صورت مجموعه جمع‌های مؤلفه‌های اعضای S حداقل چهار عضو دارد.

هر چند اثبات این گزاره از یک منظر شبیه گزاره قبل است اما برای روشن شدن آن‌چه که باید برای حالت کلی مسأله (حالتی که تعداد بازیکنان بیش از ۳ نفر است) انجام گیرد، بهتر آن است به بیان این اثبات بپردازیم: یک سه‌تایی (a, b, c) را در S انتخاب کنیم تا a کمترین مقدار ممکن باشد. برای مجموعه جفت‌های (b, c) که (a, b, c) در S باشد فرض گزاره ۱ درست است، و طبق نتیجه آن گزاره دست‌کم سه زوج (b_1, c_1) و (b_2, c_2) و (b_3, c_3) هست که هم (a, b_1, c_1) هم (a, b_2, c_2) هم (a, b_3, c_3) در S قرار دارد و سه مجموع $a + b_1 + c_1$ و $a + b_2 + c_2$ و $a + b_3 + c_3$ با هم دیگر متفاوت هستند. مثلاً می‌توان فرض کرد که

$$a + b_1 + c_1 > a + b_2 + c_2 > a + b_3 + c_3.$$

حال به خاطر فرض گزاره می‌دانیم که یک عددی d وجود دارد که d با a متفاوت است و سه‌تایی (d, b_1, c_1) در S قرار دارد.

می‌دانیم که d باید از a بزرگ‌تر باشد (وگرنه ما در اولین مرحله این اثبات سه‌تایی (d, b_1, c_1) را انتخاب می‌کردیم)، بنابرین

$$d + b_1 + c_1 > a + b_1 + c_1 > a + b_2 + c_2 > a + b_3 + c_3$$

و این گزاره را ثابت می‌کند.

سرانجام، می‌خواهیم توجه خواننده را به دو نکته جلب کنیم. نخست این که با کمک یک استدلال استقرایی، می‌توان ثابت کرد که اگر در بازی بیشتر از سه مرد هم شرکت کنند، به شرط این‌که تعداد اعداد روی تخته از تعداد مردان بیشتر نباشد، بازی همیشه

به پایان می‌رسد. این قضیه از کانووی و پاترسون است (به مقاله [۲] مراجعه کنید.) دوم این که برای این قضیه اصلاً مهم نیست که اعداد روی پیشانی مردان و روی تخته اعداد صحیح باشد، و اگر هم بازی با اعداد حقیقی نامنفی انجام شود، همیشه به پایان می‌رسد. اثبات این سخت نیست: مهم‌ترین نکته این است که هر مجموعه S_n یک مجموعه فشرده است. پس اگر فرض کنیم که بازی هیچ وقت به پایان نرسد، آنگاه برای هر n مجموعه S_n تهی نیست. چون $S_n \subset S_{n-1}$ و چون هر S_n فشرده است می‌توان نتیجه گرفت که اشتراک $S = \bigcap_{n\geq 0} S_n$ نیز ناتهی است. ولی کاربرد گزاره ۲ (که برای یک زیرمجموعه فشرده $\mathbb{R}^3$ هم درست است) با این S موجب تناقض می‌باشد. (برای جزئیات به مقاله [۲] مراجعه کنید.)

اینک خواننده می‌تواند بپرسد که چه ارتباطی میان معمای اخیر و معمای جزیره موجود است. در اصل معمای جزیره حالتی خاص از این بازی کانووی است: تصور کنید در آن جزیره روی پیشانی افرادی که چشم سبز دارند ۰ و روی پیشانی چشم آبی‌ها ۱ نوشته شده باشد. آنچه بیگانه اعلام می‌کند معادل این است که مجموع اعداد روی پیشانی مردم قبیله یکی از اعداد ۱ الی ۱۰۰ است. گذر هر شب به منزله یک دور کامل از بازی تلقی می‌شود.

قدردانی و تشکر.
نویسنده اول علاقه دارد که از دو شخص در پایان این یادداشت سپاسگزاری کند: نخست پروفسور **جان کانووی** از دانشگاه پرینستون به خاطر گفتگوی بسیار با ارزش درباره معمای دوم. سپس آقای **مهدی شاکری** به خاطر آموختن زبان شیرین فارسی به وی.

[1] D. Gale (editor), *Tracking the automatic ANT*, Springer-Verlag, 1998.

[2] M. Lasry, J. M. Morel, S. Solimini, *On knowledge games*, Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid, (**2**. No. 2-3), 1989.

* دانشگاه پرینستون
** دانشگاه تبریز

تأملی فلسفی در ریاضیات

مجموعهٔ نه‌چندان تهی!

حسن فتح‌زاده *

مقدمه: اندکی فلسفه

افلاطون وقتی از یک جوهر[۱۸] سخن می‌گفت یکی از مهم‌ترین مشخصات آن را وحدت می‌دانست، و این وحدت نه معرفت‌شناختی، که مسلماً هستی‌شناختی و در خود آن بود. بر همین مبنا بود که او می‌توانست از عینیت جواهر سخن بگوید، برخلاف وحدت‌هایی که از سوی ما بر امور کثیر تحمیل می‌شود. یک «درخت»، یک «میخ» و یک «تکه ابر» را نمی‌توان در کنار هم و با هم، در قالب هر روایتی، یک جوهر دانست. به همین دلیل گردایه‌ای مرکب از اجزا تنها هنگامی تشکیل یک جوهر می‌دهند که یک کلیت حقیقی بر آن‌ها حاکم باشد، کلیتی هستی‌شناختی و نه معرفت‌شناختی. برای مثال هزاران قطعه در نظمی دقیق کنار هم قرار می‌گیرند تا یک ماشین پیچیده بسازند. اما وحدت حاکم بر این ماشین وحدتی معرفت‌شناختی و ناظر به کارکرد آن است؛ و این وحدت کارکردی[۱۹] به قصد و هدف ما ارجاع دارد. هر نظم فیزیکی معنای خود را از یک فاعل شناسا می‌گیرد. از منظری صرفاً فیزیکی میان این ماشین پیچیده و تلنباری از اجسام درهم و برهم هیچ تفاوتی نمی‌توان قائل شد، هر دو به یکسان از قوانین ثابت پیروی می‌کنند و رفتاری پیش‌بینی‌پذیر دارند. بر این مبنا تفاوت میان این ماشین و گردایهٔ «درخت، میخ و تکه ابر» تفاوتی اصیل و واقعی نیست.

اما برخلاف مورد ماشین، در مورد یک گیاه یا حیوان با اجزای بسیاری روبه‌روایم که گویی در کنار هم کلیتی حقیقی را می‌سازند، و این کلیت مستقل از قصد و هدف ما و در خود آن‌ها تحقق می‌یابد. بدین ترتیب سلول‌ها و اندام‌های مختلف از طبیعت متمایز می‌شوند و تشکیل وحدتی هستی‌شناختی می‌دهند که به ما اجازه می‌دهد یک ارگانیسم را جوهر بدانیم. وحدت یک ارگانیسم حقیقی و عینی است. این وحدت، که در اندیشهٔ معاصر معطوف به «دیگری» می‌شود، راه را بر ایده‌های سوفیستی می‌بندد. اندیشمندان یونانی به همین دلیل برای گیاهان و حیوانات وحدتی جوهری قائل بودند که آن را به «پسوخه[۲۰]»(نفس) نسبت

[۱۸] Entity
[۱۹] Functional
[۲۰] Psuche