Cohomologie d'intersection des variétés modulaires de Siegel, suite

Sophie Morel

Abstract

In this work, we study the intersection cohomology of Siegel modular varieties. The goal is to express the trace of a Hecke operator composed with a power of the Frobenius endomorphism (at a good place) on this cohomology in terms of the geometric side of Arthur's invariant trace formula for well-chosen test functions.

Our main tools are the results of Kottwitz about the contribution of the cohomology with compact support and about the stabilization of the trace formula, Arthur's L^2 trace formula and the fixed point formula of [M1]. We "stabilize" this last formula, ie express it as a sum of stable distributions on the general symplectic groups and its endoscopic groups, and obtain the formula conjectured by Kottwitz in [K7].

Applications of the results of this article have already been given by Kottwitz, assuming Arthur's conjectures. Here, we give weaker unconditional applications in the cases of the groups $\mathbf{GSp}_4$ and $\mathbf{GSp}_6$.

Table des matières

2000 Mathematics Subject Classification 11G18 (primary), 14F20, 20G35 (secondary)
Keywords: Siegel modular varieties, intersection cohomology, discrete automorphic representations of symplectic groups

Ce texte a été écrit pendant que j'étais employée par le Clay Mathematics Institute en tant que Clay Research Fellow, et accueillie en tant que membre à l'Institute for Advanced Study à Princeton. Il a été révisé pendant mon séjour à l'université Harvard en tant que visiteur, puis en tant que professeur. De plus, j'ai bénéficié du soutien financier de la NSF à travers les contrats DMS-0111298 et DMS-0635607.

Introduction

Cet article est la suite de l'article [M1], et il est parallèle au livre [M2], dont il suit globalement la structure et utilise certains des résultats. Son but est de continuer l'étude de la cohomologie d'intersection de la compactification de Satake-Baily-Borel des variétés modulaires de Siegel (l'objet de [M2] était le cas des variétés de Shimura associées aux groupes unitaires sur $\mathbb{Q}$).

La méthode utilisée est celle développée par Ihara, Langlands et Kottwitz : comparaison de la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz et de la formule des traces d'Arthur-Selberg. Le premier pas, c'est-à-dire le calcul de la trace sur la cohomologie d'intersection d'une correspondance de Hecke composée avec une puissance (assez grande) du morphisme de Frobenius en une bonne place, était l'objet de l'article [M1] (complété par le chapitre 1 de [M2]). On exprime ici la formule obtenue en fonction du côté géométrique de la formule des traces stable sur le groupe général symplectique et ses groupes endoscopiques. Notons que cette "stabilisation" utilise le lemme fondamental et certains cas du lemme fondamental tordu ; ces résultats sont désormais disponibles grâce aux travaux de Laumon-Ngo ([LN]), Ngo ([N]) et Waldspurger ([W1], [W2], [W3]).

Pour la partie elliptique de la formule des points fixes (c'est-à-dire la partie qui provient de la cohomologie à supports compacts de la variété de Shimura), la stabilisation modulo les lemmes fondamentaux est due à Kottwitz ([K7]). On applique ici la méthode de Kottwitz aux sous-groupes de Levi du groupe général symplectique pour obtenir la stabilisation des termes non elliptiques ; pour faire le lien entre les sous-groupes de Levi des groupes endoscopiques et les groupes endoscopiques des sous-groupes de Levi, on utilise aussi des méthodes de Kottwitz (cf [K8]). Le seul point qui est vraiment plus difficile que dans le cas des variétés de Shimura compactes est la stabilisation de la partie à l'infini (qui prend d'ailleurs la moitié de cet article).

Le théorème principal est le théorème 5.3.2. Son corollaire 5.3.3 est la formule conjecturée par Kottwitz dans [K7] (10.1) (pour les variétés modulaires de Siegel) :

Théorème. *Soit S^{K} la variété modulaire de Siegel associée au groupe $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_{2n}$ et de niveau $\mathrm{K} \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ net. On note $IH^*(S^{\mathrm{K}}, V)$ la cohomologie d'intersection de la compactification de Satake-Baily-Borel de S^K à coefficients dans une représentation algébrique V de $\mathbf{G}$. Soit p un nombre premier tel que $\mathrm{K} = \mathbf{G}(\mathbb{Z}_p)\mathrm{K}^p$, avec $\mathrm{K}^p \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$; on note $Frob_p \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ un relèvement du Frobenius géométrique en p. Alors, pour toute fonction $f^\infty \in C_c^\infty(\mathrm{K} \setminus \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K})$ telle que $f^\infty = f^{\infty,p}\mathbb{1}_{\mathbf{G}(\mathbb{Z}_p)}$ et pour tout entier j assez grand, on a*

$$\mathrm{Tr}(Frob_p^j \times f^\infty, IH^*(S^{\mathrm{K}}, V)) = \sum_{(\mathbf{H},s,\eta_0)} \iota(\mathbf{G}, \mathbf{H}) ST^H(f_{\mathbf{H}}^{(j)}),$$

où la somme est sur les classes d'équivalence de triplets endoscopiques elliptiques $(\mathbf{H}, s, \eta_0)$ de $\mathbf{G}$ tels que $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ admette un tore maximal elliptique, les $f_{\mathbf{H}}^{(j)}$ sont des fonctions sur $\mathbf{H}(\mathbb{A})$ déterminées par f^∞, j et V et ST^H est le côté géométrique de la formule des traces stable sur $\mathbf{H}$.

Les notations précises sont expliquées dans 5.3. Signalons tout de même ce que l'on entend par "côté géométrique de la formule des traces stable". Pour les fonctions qui apparaissent lorsque l'on calcule la cohomologie des variétés de Shimura (c'est-à-dire les fonctions cuspidales stables à l'infini), Arthur a donné dans [A] (formule (3.5) et théorème 6.1) une expression simple de la formule des traces invariante. Kottwitz a stabilisé le côté géométrique de cette expression dans [K8] ; notons que cette stabilisation n'utilise que le lemme fondamental (et pas le lemme fondamental pondéré). On utilise ici la formule de Kottwitz. Malheureusement, l'article [K8] n'est pas publié, et il ne considère que le cas des groupes à groupe dérivé simplement connexe, alors que les groupes endoscopiques des groupes symplectiques ne vérifient pas tous cette condition. Cependant, il ne fait aucun doute que les méthodes de [K8] s'adapteraient au cas général, avec plus de complications techniques. C'est la formule de [K8] qui est utilisée dans cet article.

Si l'on admet les conjectures d'Arthur sur la description du spectre discret des groupes symplectiques et orthogonaux-symplectiques de 1.1, alors on peut déduire d'une formule comme celle du corollaire 5.3.3 la description complète de la cohomologie d'intersection. Cela a été fait par Kottwitz dans les section 8 à 10 de [K7]. Arthur a annoncé une preuve de ses conjectures pour les groupes orthogonaux et symplectiques (en admettant la stabilisation de la formule des traces tordue). Cependant, on aurait besoin ici des conjectures d'Arthur pour les groupes *généraux* symplectiques (et certains groupes généraux orthogonaux-symplectiques). Plutôt que d'utiliser les résultats annoncés par Arthur pour tenter de donner des applications aussi générales que possible du corollaire 5.3.3, on a choisi de donner des applications inconditionnelles pour les groupes $\mathbf{GSp}_4$ et $\mathbf{GSp}_6$, où la situation est particulièrement simple (principalement parce que le groupe $\mathbf{PSO}_4$ est isomorphe à $\mathbf{PGL}_2\times\mathbf{PGL}_2$, cf la proposition 5.2.1). On obtient par exemple le résultat suivant sur la fonction L du complexe d'intersection (proposition 6.2) :

Corollaire. *On garde les notations du théorème ci-dessus, et on suppose que $\mathbf{G}=\mathbf{GSp}_4$ ou $\mathbf{G}=\mathbf{GSp}_6$. Alors*

$$\log L_p(s,IH^*(S^{\mathrm{K}},V))=\sum_{\pi_f}c_{\mathbf{G}}(\pi_f)\dim(\pi_f^{\mathrm{K}})\log L(s-\frac{d}{2},\pi_p,r_{-\mu})$$
$$+\sum_{\pi_{H,f}}c_{\mathbf{H}}(\pi_{H,f})\,\mathrm{Tr}(\pi_{H,f}((\mathbb{1}_{\mathrm{K}})^{\mathbf{H}}))\sum_{\mu_H\in M_H}\varepsilon(\mu_H)\log L(s-\frac{d}{2},\pi_{H,p},r_{-\mu_H}).$$

Dans cette formule, $\mathbf{H}$ est égal à $\mathbf{GSO}_4$ si $\mathbf{G}=\mathbf{GSp}_4$ et à $\mathbf{G}(\mathbf{Sp}_2\times\mathbf{SO}_4)$ si $\mathbf{G}=\mathbf{GSp}_6$, la première (resp. deuxième) somme est sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles admissibles π_f (resp. $\pi_{H,f}$) de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ (resp. $\mathbf{H}(\mathbb{A}_f)$), les $c_{\mathbf{G}}(\pi_f)$ et $c_{\mathbf{H}}(\pi_{H,f})$ sont des coefficients définis dans la section 6, $(\mathbb{1}_{\mathrm{K}})^{\mathbf{H}}$ est un transfert de $\mathbb{1}_{\mathrm{K}}$, M_H est un ensemble de cocaractères de $\mathbf{H}$, les $\varepsilon(\mu_h)$ sont des signes, $r_{-\mu}$ (resp. $r_{-\mu_H}$) est la représentation algébrique de $\widehat{\mathbf{G}}$ (resp. $\widehat{\mathbf{H}}$) de plus haut poids $-\mu$ (resp. $-\mu_H$) et $d=\dim(S^{\mathrm{K}})$.

Signalons enfin que le cas du groupe $\mathbf{GU}(2,1)$ est traité dans le livre [LR] (plus complètement, puisque les conjectures d'Arthur sont connues dans ce cas par les travaux de Rogawski, cf [R]), celui des groupes unitaires sur $\mathbb{Q}$ est traité dans le livre [M2] (dont on utilisera souvent les lemmes techniques) et que, dans le cas du groupe $\mathbf{GSp}_4$, Gérard Laumon a appliqué les mêmes méthodes à l'étude de la cohomologie à supports compacts (cf [Lau1], [Lau2]).

Donnons une description rapide des différentes sections.

La section 1 est consacrée à des définitions et des rappels sur la formule des points fixes. La formule des points fixes que l'on utilise ici (théorème 1.2.1) est celle de [M2] 1.7 où on a un peu réarrangé les termes pour rendre la stabilisation plus facile.

La section 2 contient des rappels sur l'endoscopie et le calcul des données endoscopiques elliptiques du groupes $\mathbf{GSp}_{2n}$ et de ses sous-groupes de Levi. En particulier, on rappelle dans 2.2 quelques définitions non standard de [K8].

Les sections 3 et 4 prouvent les résulats locaux qui sont utilisés dans 5.3. La section 4 est consacrée aux calculs à la place p et la section 3 à ceux à la place infinie (cette dernière section, avec son appendice 7, contient la partie la plus technique et pénible de l'article, et celle où la différence avec le cas des groupes unitaires est la plus grande).

La section 5 énonce le résultat de Kottwitz ([K8]) sur le côté géométrique de la formule des traces stable et donne la stabilisation de la formule des points fixes.

Enfin, la section 6 donne des applications des résultats de 5.3 dans le cas des groupes $\mathbf{GSp}_4$ et $\mathbf{GSp}_6$. On y prouve une formule pour la trace d'une puissance du Frobenius sur les composantes isotypiques (pour l'action de $\mathbf{GSp}_{2n}(\mathbb{A}_f)$) de la cohomologie d'intersection (théorème 6.1.1).

Je remercie vivement Robert Kottwitz, qui m'a apporté une aide précieuse en corrigeant certaines de mes idées fausses sur l'endoscopie et en me permettant de lire son manuscrit [K8], ainsi que Gérard Laumon. Je remercie aussi les autres mathématiciens qui ont répondu à mes questions ou m'ont signalé des simplifications, en particulier Pierre-Henri Chaudouard, Laurent Fargues, Günter Harder, Colette Moeglin, Bao Chau Ngo, Sug Woo Shin et Marie-France Vignéras. Enfin, je remercie le rapporteur anonyme qui a signalé plusieurs erreurs et inexactitudes dans les versions précédentes de ce texte, et m'a patiemment aidée à débusquer une erreur tenace dans l'appendice.

Dans tout cet article, on utilisera la notation suivante : Soient F un corps, $\mathbf{G}$ un groupe algébrique sur F et $\gamma \in \mathbf{G}(F)$. Alors on note $\mathbf{G}_\gamma = \mathrm{Cent}_{\mathbf{G}}(\gamma)^0$.

1. La formule des points fixes

Le but de cette section est de rappeler la formule des points fixes du chapitre 1 de [M2] (cf aussi [M1] pour le cas d'une correspondance de Hecke triviale), sous une forme un peu plus commode pour le processus de stabilisation de la section 5.

1.1 Définition des groupes et des données de Shimura

Dans ce paragraphe, on définit les groupes symplectiques et leurs données de Shimura, et on rappelle la description de leurs sous-groupes paraboliques. On introduit aussi les groupes orthogonaux, car ceux-ci apparaissent comme groupes endoscopiques des groupes symplectiques (cf 2.1).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$$

et

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & A_n \\ -A_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_{2n}(\mathbb{Z}).$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $J \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})$ une matrice symétrique. On définit des groupes algébriques $\mathbf{GO}(J)$ et $\mathbf{GSp}_{2n}$ sur $\mathbb{Q}$ en posant, pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre A :

$$\mathbf{GO}(J)(A) = \{g \in \mathbf{GL}_n(A) | {}^t gJg = c(g)J, c(g) \in A^\times\}$$

$$\mathbf{GSp}_{2n}(A) = \{g \in \mathbf{GL}_{2n}(A) | {}^t gB_n g = c(g)B_n, c(g) \in A^\times\}.$$

On a des morphismes de groupes algébriques sur $\mathbb{Q}$:

$$c : \mathbf{GO}(J) \longrightarrow \mathbb{G}_m \text{ et } \det : \mathbf{GO}(J) \longrightarrow \mathbb{G}_m$$

$$c : \mathbf{GSp}_{2n} \longrightarrow \mathbb{G}_m \text{ et } \det : \mathbf{GSp}_{2n} \longrightarrow \mathbb{G}_m.$$

On note $\mathbf{O}(J) = \mathrm{Ker}(c)$ et $\mathbf{SO}(J) = \mathrm{Ker}(c) \cap \mathrm{Ker}(\det)$ (resp. $\mathbf{Sp}_{2n} = \mathrm{Ker}(c) = \mathrm{Ker}(c) \cap \mathrm{Ker}(\det)$). Le groupe $\mathbf{GO}(J)$ n'est pas forcément connexe (il a deux composantes connexes si n est pair) ; on note $\mathbf{GSO}(J) = \mathbf{GO}(J)^0$.

Le groupe $\mathbf{SO}(J)$ (resp. $\mathbf{Sp}_{2n}$) est le groupe dérivé de $\mathbf{GSO}(J)$ (resp. de $\mathbf{GSp}_{2n}$). Les groupes

$\mathbf{GSO}(J)$ et $\mathbf{GSp}_{2n}$ sont réductifs connexes, et le groupe $\mathbf{Sp}_{2n}$ est semi-simple simplement connexe.

On note $\mathbf{GSO}_n = \mathbf{GSO}(A_n)$. Le groupe $\mathbf{GSO}_n$ est la forme intérieure quasi-déployée du groupe $\mathbf{GSO}(J)$, pour toute $J \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})$ symétrique, et il est déployé de rang semi-simple $\lfloor n/2 \rfloor$. D'autre part, le groupe $\mathbf{GSp}_{2n}$ est déployé sur $\mathbb{Q}$, de rang semi-simple n.

Enfin, on note $\mathbf{GSp}_0 = \mathbf{GSO}_0 = \mathbb{G}_m$, et $(c : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m) = id$.

Remarque 1.1.1. Si la matrice J est dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$, on peut étendre $\mathbf{GO}(J)$ en un schéma en groupes $\mathcal{G}'$ sur $\mathbb{Z}$ en posant, pour toute $\mathbb{Z}$-algèbre A,

$$\mathcal{G}'(A) = \{g \in \mathbf{GL}_n(A) | {}^t gJg = c(g)J, c(g) \in A^\times\}.$$

Alors $\mathcal{G} := (\mathcal{G}')^0$ est un schéma en groupes sur $\mathbb{Z}$ qui étend $\mathbf{GSO}(J)$ et, pour tout nombre premier ℓ, $\mathcal{G}_{\mathbb{F}_\ell}$ est un groupe algébrique réductif connexe sur $\mathbb{F}_\ell$.

On a évidemment une construction similaire pour les groupes $\mathbf{GSp}_{2n}$.

On définit maintenant les données de Shimura. On note $\mathbb{S} = R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, et on note $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_{2n}$. On note $\mathcal{X}_n^+$ ou $\mathcal{X}^+$ (resp. $\mathcal{X}_n^-$ ou $\mathcal{X}^-$) l'ensemble des morphismes $h : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbf{G}_\mathbb{R}$ qui induisent une structure de Hodge pure de type $\{(0,1),(1,0)\}$ sur $\mathbb{Q}^{2n}$, et tels que la forme bilinéaire $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(v,w) \longmapsto {}^t vB_nh(i)w$ soit symétrique définie positive (resp. négative). Le groupe $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ agit transitivement (par conjugaison) sur $\mathcal{X} = \mathcal{X}^+ \cup \mathcal{X}^-$, et le morphisme

$$h : z = a + ib \longmapsto \begin{pmatrix} aI_n & -bA_n \\ bA_n & aI_n \end{pmatrix}$$

est dans $\mathcal{X}^+$, donc $\mathcal{X} \simeq \mathbf{G}(\mathbb{R})/Stab_{\mathbf{G}(\mathbb{R})}(h)$. Le triplet $(\mathbf{G}, \mathcal{X}, h)$ est une donnée de Shimura pure au sens de [P1] 2.1. Remarquons au passage que le cocaractère $\mu : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbf{G}_\mathbb{C}$ associé à h comme dans (par exemple) [K7] §1 est $z \longmapsto diag(zI_n, I_n)$; en particulier, il est défini sur $\mathbb{Q}$, donc le corps reflex de la donnée $(\mathbf{G}, \mathcal{X}, h)$ est $\mathbb{Q}$.

Rappelons la description des sous-groupes paraboliques des groupes symplectiques.

Un tore maximal de $\mathbf{G}$ est

$$\mathbf{T} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{2n} \end{pmatrix}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{G}_m, \lambda_1\lambda_{2n} = \lambda_2\lambda_{2n-1} \cdots = \lambda_n\lambda_{n+1} \right\}.$$

Il est déployé. L'intersection $\mathbf{P}_0$ de $\mathbf{G}$ avec le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathbf{GL}_{2n}$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{T}$. Les sous-groupes paraboliques standard de $\mathbf{G}$ sont indexés par les sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ de la manière suivante.

Soit $S \subset \{1, \dots, n\}$. On écrit $S = \{r_1, r_1 + r_2, \dots, r_1 + \cdots + r_m\}$ avec $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}^*$ et on note $r = r_1 + \cdots + r_m$. Le sous-groupe parabolique standard $\mathbf{P}_S$ correspondant est l'intersection avec $\mathbf{G}$

du groupe

$$\begin{pmatrix} \mathbf{GL}_{r_1} & & & & & & * \\ & \ddots & & & & & \\ & & \mathbf{GL}_{r_m} & & & & \\ & & & \mathbf{GSp}_{2(n-r)} & & & \\ & & & & \mathbf{GL}_{r_m} & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & \mathbf{GL}_{r_1} \end{pmatrix}.$$

En particulier, les sous-groupes paraboliques maximaux standard de $\mathbf{G}$ sont les

$$\mathbf{P}_r := \mathbf{P}_{\{r\}} = \begin{pmatrix} \mathbf{GL}_r & & * \\ & \mathbf{GSp}_{2(n-r)} & \\ 0 & & \mathbf{GL}_r \end{pmatrix} \cap \mathbf{G}$$

pour $r \in \{1, \dots, n\}$, et on a $\mathbf{P}_S = \bigcap\limits_{r \in S} \mathbf{P}_r$.

On note $\mathbf{N}_S$ (ou $\mathbf{N}_{P_S}$) le radical unipotent de $\mathbf{P}_S$, $\mathbf{M}_S$ (ou $\mathbf{M}_{P_S}$) le sous-groupe de Levi évident (formé des matrices diagonales par blocs) et $\mathbf{A}_{M_S}$ le sous-tore déployé maximal du centre de $\mathbf{M}_S$. Si on écrit comme plus haut $S = \{r_1, \dots, r_1 + \dots + r_m\}$ et $r = r_1 + \dots + r_m$, on a un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}_S & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} & \mathbf{GL}_{r_1} \times \dots \times \mathbf{GL}_{r_m} \times \mathbf{GSp}_{2(n-r)} \\ diag(g_1, \dots, g_m, g, h_m, \dots, h_1) & \longmapsto & (c(g)^{-1} g_1, \dots, c(g)^{-1} g_m, g) \end{array}.$$

L'image réciproque par cet isomorphisme de $\mathbf{GL}_{n_1} \times \dots \times \mathbf{GL}_{r_m}$ est appelée *partie linéaire* de $\mathbf{M}_S$; on la note $\mathbf{L}_S$ ou $\mathbf{M}_{S,l}$. L'image réciproque de $\mathbf{GSp}_{2(n-r)}$ est appelée *partie hermitienne* de $\mathbf{M}_S$, et notée $\mathbf{G}_r$ ou $\mathbf{M}_{S,h}$. On voit en particulier que les sous-groupes paraboliques maximaux de $\mathbf{G}$ vérifient l'hypothèse de la section 1.1 de [M2]. Remarquons aussi que, grâce au choix de l'isomorphisme entre $\mathbf{M}_S$ et $\mathbf{GL}_{r_1} \times \dots \times \mathbf{GL}_{n_r} \times \mathbf{GSp}_{2(n-r)}$, l'image du cocaractère $\mu : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathbb{C}}$ est contenue dans la partie hermitienne $\mathbf{G}_r$; le cocaractère de $\mathbf{G}_r$ que l'on obtient est l'analogue de μ pour $\mathbf{G}_r \simeq \mathbf{GSp}_{2(n-r)}$.

1.2 Formule des points fixes

Les références pour tous les faits énoncés dans ce paragraphe sont données dans le chapitre 1 de [M2]. Comme dans [M2], on fixe une fois pour toutes des clôtures algébriques $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ et $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$, pour tout nombre premier p, et des inclusions $\overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ et $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$.

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, et on note $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_{2n}$. Soit K un sous-groupe compact ouvert net de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ (cf [P1] 0.6). On note S^{K} la variété de Shimura de niveau K définie par la donnée $(\mathbf{G}, \mathcal{X}, h)$ de 1.1 ; c'est une variété algébrique quasi-projective sur $\mathbb{Q}$, dont l'ensemble des points complexes est donné par la formule

$$S^{\mathrm{K}}(\mathbb{C}) = \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus (\mathcal{X} \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}).$$

Soit $j : S^{\mathrm{K}} \longrightarrow \overline{S}^{\mathrm{K}}$ la compactification de Satake-Baily-Borel de S^{K} ; la variété $\overline{S}^{\mathrm{K}}$ est aussi définie sur $\mathbb{Q}$, et elle est projective et normale, mais elle n'est pas lisse si $n \geqslant 2$. Soit V une représentation algébrique de $\mathbf{G}$. Comme $\mathbf{G}$ est déployé, V est définie sur $\mathbb{Q}$. On fixe un nombre premier ℓ et un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$. Alors il est bien connu qu'on peut associer à V un faisceau ℓ-adique lisse $\mathcal{F}^{\mathrm{K}} V$ sur S^{K} de fibre $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ en tout point géométrique de S^{K} (voir par exemple la section 5.1 de [P2]). Le complexe d'intersection sur $\overline{S}^{\mathrm{K}}$ à coefficients dans V est par définition

$$IC^{\mathrm{K}} V = (j_{!*}(\mathcal{F}^{\mathrm{K}} V[d]))[-d],$$

où d est la dimension de S^{K} (donc $d = n(n+1)/2$). La cohomologie de $IC^{\mathrm{K}} V$ est une représentation (graduée) de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathcal{H}_{\mathrm{K}}$, où $\mathcal{H}_{\mathrm{K}} = \mathcal{H}(\mathbf{G}(\mathbb{A}_f), \mathrm{K})$ est l'algèbre de Hecke des fonctions de $C_c^\infty(\mathbf{G}(\mathbb{A}_f), \mathbb{C})$ qui sont bi-invariantes par K.

On fixe $f^\infty \in \mathcal{H}_{\mathrm{K}}$ et un nombre premier $p \neq \ell$ tel que $\mathrm{K} = \mathrm{K}^p \mathbf{G}(\mathbb{Z}_p)$ avec $\mathrm{K}^p \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$ et $f^\infty = f^{\infty,p} \mathbb{1}_{\mathbf{G}(\mathbb{Z}_p)}$ avec $f^{\infty,p} \in C_c^\infty(\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p))$. Soit $Frob_p \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ un relèvement du Frobenius géométrique en p. On va rappeler la formule de [M2] 1.7 pour la trace de $Frob_p^j \times f$ ($j >> 0$) sur la cohomologie de $IC^{\mathrm{K}} V$.

Rappelons (cf [K8] 1.5) qu'un sous-groupe de Levi $\mathbf{M}$ de $\mathbf{G}$ est dit *cuspidal* si $(\mathbf{M}/\mathbf{A}_M)_{\mathbb{R}}$ admet un tore maximal anisotrope (sur $\mathbb{R}$), où $\mathbf{A}_M$ est la partie déployée du centre de $\mathbf{M}$. Il est facile de voir que les sous-groupes de Levi cuspidaux de $\mathbf{G}$ sont ceux isomorphes à un groupe $\mathbb{G}_m^r \times \mathbf{GL}_2^t \times \mathbf{GSp}_{2(n-r-2t)}$, avec $r, t \in \mathbb{N}$ et $r + 2t \leqslant n$.

Soit $\mathbf{M}$ un sous-groupe de Levi cuspidal standard de $\mathbf{G}$ et soit $\mathbf{M}_h$ sa partie hermitienne. Alors $\mu : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbf{G}$ se factorise par $\mathbf{M}_h$, donc on peut utiliser μ pour définir l'ensemble des triplets de Kottwitz associé à $\mathbf{M}_h$ et à $j \in \mathbb{N}^*$ (les définitions sont celles de [K7] §2 et §3) : Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On note L l'extension non ramifiée de degré j de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$ le relèvement du Frobenius arithmétique. Alors un triplet de Kottwitz est un triplet $(\gamma_0; \gamma, \delta)$, où $\gamma_0 \in \mathbf{M}_h(\mathbb{Q})$, $\gamma = (\gamma_v)_{\neq p,\infty} \in \mathbf{M}_h(\mathbb{A}_f^p)$ et $\delta \in \mathbf{M}_h(L)$, qui vérifie un certain ensemble de conditions, notées (C) dans [M2] 1.6 (on utilisera la même notation ici). On renvoie à [K7] §2 pour l'énoncé précis de ces conditions : notons simplement ici qu'en particulier, on demande que γ_0 soit semi-simple et elliptique dans $\mathbf{M}_h(\mathbb{R})$, que γ_v et γ_0 soient stablement conjugués pour toute place $v \neq p, \infty$ de $\mathbb{Q}$ et que $N\delta := \delta\sigma(\delta) \dots \sigma^{j-1}(\delta)$ et γ_0 soient stablement conjugués. On dit que deux triplets de Kottwitz $(\gamma_0; \gamma, \delta)$ et $(\gamma_0'; \gamma', \delta')$ sont équivalents, et on note $(\gamma_0; \gamma, \delta) \sim (\gamma_0'; \gamma, \delta)$, si γ_0 et γ_0' sont stablement conjugués, γ et γ' sont conjugués dans $\mathbf{M}_h(\mathbb{A}_f^p)$ et δ et δ' sont σ-conjugués dans $\mathbf{M}_h(L)$ (ie il existe $x \in \mathbf{M}_h(L)$ tel que $\delta' = x\delta\sigma(x)^{-1}$). Enfin, dans [K7] §2, Kottwitz associe à tout $(\gamma_0; \gamma, \delta)$ un invariant cohomologique $\alpha(\gamma_0; \gamma, \delta) \in \mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})^D$ ($I_0 = \mathbf{M}_{h,\gamma_0}$, cf loc. cit. pour les autres notations), qui ne dépend que de la classe d'équivalence de $(\gamma_0; \gamma, \delta)$ (en un sens précisé dans loc. cit.). Si $(\gamma_0; \gamma, \delta)$ est tel que $\alpha(\gamma_0; \gamma, \delta) = 0$, Kottwitz définit dans [K7] §3 une forme intérieure I de I_0 telle que $I/\mathbf{A}_{M_h}$ soit anisotrope sur $\mathbb{R}$, que $I_{\mathbb{Q}_v} \simeq \mathbf{M}_{h,\gamma_v}$ pour $v \neq p, \infty$ et que $I(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbf{M}_h(L)_\delta^\sigma$ (le σ-centralisateur de δ dans $\mathbf{M}_h(L)$, ie l'ensemble des $x \in \mathbf{M}_h(L)$ tels que $x\delta\sigma(x)^{-1} = \delta$) ; on note alors

$$c(\gamma_0; \gamma, \delta) = \mathrm{vol}(I(\mathbb{Q}) \setminus I(\mathbb{A}_f))$$

(l'autre facteur dans la définition de [K7] §3 disparaît grâce au lemme 2.1.2). Comme dans [M2] 1.6, on note $C_{M_h,j}$ l'ensemble des classes d'équivalence de triplets de Kottwitz $(\gamma_0; \gamma, \delta)$ tels que $\alpha(\gamma_0; \gamma, \delta) = 0$. Si $\mathbf{M}_h$ est un tore, on a un sous-ensemble $C'_{M_h,j}$ de $C_{M_h,j}$ défini dans la remarque 1.6.5 de [M2] : c'est le sous-ensemble des classes d'équivalence de triplets $(\gamma_0; \gamma, \delta)$ tels que $c(\gamma_0) > 0$. Si $\mathbf{M}_h$ n'est pas un tore, on note $C'_{M_h,j} = C_{M_h,j}$. Rappelons aussi que l'on définit une fonction $\phi_j^{M_h}$ de $\mathcal{H}(\mathbf{M}_h(L), \mathbf{M}_h(\mathcal{O}_L))$ par

$$\phi_j^{M_h} = \mathbb{1}_{\mathbf{M}_h(\mathcal{O}_L)\mu(\varpi_L^{-1})\mathbf{M}_h(\mathcal{O}_L)} \in \mathcal{H}(\mathbf{M}_h(L), \mathbf{M}_h(\mathcal{O}_L)),$$

où ϖ_L est une uniformisante de L.

Soit $\mathbf{M}$ un sous-groupe de Levi standard de $\mathbf{G}$ (pas forcément cuspidal). On notera dans la suite $\mathbf{M}_l$ et $\mathbf{M}_h$ les parties linéaire et hermitienne de $\mathbf{M}$. Soit $\mathrm{Nor}'_{\mathbf{G}}(\mathbf{M}) = \mathrm{Nor}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M}) \cap \mathrm{Nor}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_l) \cap \mathrm{Nor}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M}_h)$ (le sous-groupe de $\mathrm{Nor}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ qui préserve la décomposition de $\mathbf{M}$ en sa partie linéaire et sa partie hermitienne). On note $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ l'ensemble des paires $(\mathbf{Q}, g)$, où $\mathbf{Q}$ est un sous-groupe parabolique standard de $\mathbf{G}$ et g est un élément de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ tel que $g\mathbf{M}_h g^{-1} = \mathbf{G}_Q$ et $g\mathbf{M}_l g^{-1}$ soit un sous-groupe de Levi de $\mathbf{L}_Q$. On considère la relation d'équivalence suivante sur $\mathcal{P}(\mathbf{M})$: $(\mathbf{Q}, g) \sim (\mathbf{Q}', g')$ si et seulement si $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}'$ et il existe $h_1 \in \mathbf{M}_Q(\mathbb{Q})$ et $h_2 \in \mathbf{M}(\mathbb{Q})$ tels que $g' = h_1 g h_2$. Pour tout $(\mathbf{Q}, g) \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$, la classe de $\mathbf{M}_Q(\mathbb{Q})$-conjugaison du sous-groupe de Levi $g\mathbf{M}g^{-1}$ de $\mathbf{M}_Q$ ne dépend que de la classe d'équivalence de $(\mathbf{Q}, g)$. Soit $\mathbf{P}$ le sous-groupe parabolique standard de $\mathbf{G}$ de sous-groupe de Levi $\mathbf{M}$. On écrit $\mathbf{P} = \mathbf{P}_S$, avec $S \subset \{1, \dots, n\}$. Pour tout $(t_s)_{s\in S} \in \mathbb{Z}^S$, on a défini dans [M1] 4.2 les complexes de cohomologie tronquée $\mathrm{H}^*(Lie(\mathbf{N}_S), V)_{<t_s,s\in S}$ et $\mathrm{H}^*(Lie(\mathbf{N}_S), V)_{>t_s,s\in S}$; ce sont des sous-$\mathbf{M}$-représentations (graduées) de $\mathrm{H}^*(Lie(\mathbf{N}_S), V)$. Si $t_s = s(s+1)/2 - n(n+1)/2$ pour tout $s \in S$, on note $\mathrm{H}^*(Lie(\mathbf{N}_S), V)_{<0}$ et $\mathrm{H}^*(Lie(\mathbf{N}_S), V)_{>0}$ au lieu de $\mathrm{H}^*(Lie(\mathbf{N}_S), V)_{<t_s,s\in S}$ et $\mathrm{H}^*(Lie(\mathbf{N}_S), V)_{>t_s,s\in S}$.

Enfin, pour tout sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$, tous sous-groupes de Levi $\mathbf{M} \subset \mathbf{M}'$ de $\mathbf{G}$ et toute place v de $\mathbb{Q}$, si $\gamma \in \mathbf{P}(\mathbb{Q}_v)$ et $\gamma_M \in \mathbf{M}(\mathbb{Q}_v)$, on note

$$\delta_{P(\mathbb{Q}_v)}(\gamma) = |\det(\mathrm{Ad}(\gamma), Lie(\mathbf{N}_P))|_v$$

$$D_M^{M'}(\gamma_M) = \det(1 - \mathrm{Ad}(\gamma), Lie(\mathbf{M}')/Lie(\mathbf{M}))$$
$$n_M^G = |\operatorname{Nor}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})(\mathbb{Q})/\mathbf{M}(\mathbb{Q})|.$$

Soit $\mathbf{M}$ un sous-groupe de Levi standard cuspidal de $\mathbf{G}$. Pour tout $\gamma_M \in \mathbf{M}(\mathbb{R})$ semi-simple elliptique, on pose

$$L_M(\gamma_M) = \sum_{(\mathbf{Q},g)\in\mathcal{P}(\mathbf{M})/\sim} |(\operatorname{Nor}'_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})/(\operatorname{Nor}'_{\mathbf{G}}(\mathbf{M}) \cap g^{-1}\mathbf{M}_Q g))(\mathbb{Q})|^{-1} m_Q (-1)^{\dim(\mathbf{A}_{gMg^{-1}}/\mathbf{A}_{M_Q})}$$
$$(n_{gMg^{-1}}^{M_Q})^{-1} |D_{gMg^{-1}}^{M_Q}(g\gamma_M g^{-1})|^{1/2} \delta_{\mathbf{Q}(\mathbb{R})}^{1/2}(g\gamma_M g^{-1}) \operatorname{Tr}(g\gamma_M g^{-1}, \mathrm{H}^*(Lie(\mathbf{N}_Q), V)_{>0}),$$

où m_Q est égal à 2 si la partie hermitienne de $\mathbf{M}_Q$ est un tore, et à 1 sinon. On note

$$\operatorname{Tr}_M(f^\infty, j) = \sum_{\gamma_L} \sum_{(\gamma_0;\gamma,\delta)\in C'_{M_h,j}} \chi(\mathbf{M}_{l,\gamma_L}) c(\gamma_0; \gamma, \delta) \delta_{P(\mathbb{Q}_p)}^{1/2}(\gamma_L\gamma_0) O_{\gamma_L\gamma}(f_M^{\infty,p}) O_{\gamma_L}(\mathbb{1}_{\mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)}) TO_\delta(\phi_j^{M_h}) L_M(\gamma_L\gamma_0),$$

où γ_L parcourt l'ensemble des classes de conjugaison de $\mathbf{M}_l(\mathbb{Q})$, $\chi(\mathbf{M}_{l,\gamma_L})$ est comme dans [GKM] 7.10 et $\mathbf{P}$ est le sous-groupe parabolique standard de sous-groupe de Levi $\mathbf{M}$. Les définitions des intégrales orbitales O_γ, des intégrales orbitales tordues TO_δ et du terme constant $f_M^{\infty,p}$ sont rappelées dans [M2] 1.6 et 1.7. On normalise les mesures de Haar comme dans [M2] 1.6 (c'est la convention de [K7] §3) : On utilise sur $\mathbf{M}_l(\mathbb{Q}_p)$ (resp. $\mathbf{M}_h(L)$) la mesure de Haar telle que le volume de $\mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)$ (resp. $\mathbf{M}_h(\mathcal{O}_L)$) soit égal à 1. On prend sur $I(\mathbb{A}_f^p)$ (resp. $I(\mathbb{Q}_p)$, resp. $\mathbf{M}_l(\mathbb{A}_f^p)_{\gamma_M}$, resp. $\mathbf{M}_l(\mathbb{Q}_p)_{\gamma_L}$) une mesure de Haar telle que les volumes des sous-groupes ouverts compacts soient des nombres rationnels, et on utilise les torseurs intérieurs de [K7] §3 pour transporter les deux premières mesures sur $\mathbf{M}_h(\mathbb{A}_f^p)_\gamma$ et $\mathbf{M}_h(L)_\delta^\sigma$.

Théorème 1.2.1. *Si j est assez grand, alors*

$$\operatorname{Tr}(Frob_p^j \times f^\infty, H^*(\overline{S}_{\overline{\mathbb{Q}}}^{\mathrm{K}}, IC^{\mathrm{K}}V)) = \sum_M \operatorname{Tr}_M(f^\infty, j),$$

où la somme est sur l'ensemble des sous-groupes de Levi cuspidaux standard de $\mathbf{G}$. De plus, si $f^\infty = \mathbb{1}_{\mathrm{K}}$, alors le théorème est vrai pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.

On aurait bien entendu un résultat similaire pour les espaces de cohomologie pondérée de [M1]. Ce théorème se déduit facilement du théorème 1.7.1 de [M2].

2. Endoscopie

2.1 Groupes endoscopiques des groupes symplectiques

Dans cette section, on s'intéresse aux triplets endoscopiques elliptiques $(\mathbf{H}, s, \eta_0)$ des groupes $\mathbf{G}$ définis dans 1.1. On utilise la définition des triplets endoscopiques et des isomorphismes de triplets endoscopiques de [K3] 7.4 et 7.5.

On commence par rappeler la définition des groupes généraux spinoriels (cf [B] 2.2(5)). Soit $n \in \mathbb{N}$. Le groupe $\{\pm 1\}$ s'identifie au sous-groupe central Z de $\mathbf{Spin}_n$ tel que $\mathbf{Spin}_n/Z = \mathbf{SO}_n$ (avec la convention $\mathbf{Spin}_0 = \{\pm 1\}$). On pose

$$\mathbf{GSpin}_n = (\mathbb{G}_m \times \mathbf{Spin}_n)/\{\pm 1\},$$

où $\{\pm 1\}$ est plongé diagonalement dans $\mathbb{G}_m \times \mathbf{Spin}_n$. Le caractère $\mathbb{G}_m \times \mathbf{Spin}_n \longrightarrow \mathbb{G}_m$, $(z,g) \longmapsto z^2$, passe au quotient et donne un caractère $c : \mathbf{GSpin}_n \longrightarrow \mathbb{G}_m$, dont le noyau s'identifie à $\mathbf{Spin}_n$. De même, si $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathbf{G}(\mathbf{Spin}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Spin}_{n_r}) = (\mathbb{G}_m \times \mathbf{Spin}_{n_1} \times \dots \mathbf{Spin}_{n_r})/\{\pm 1\},$$

où $\{\pm 1\}$ est plongé diagonalement. Le groupe $\mathbf{G}(\mathbf{Spin}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Spin}_{n_r})$ s'identifie à $\{(g_1, \dots, g_r) \in \mathbf{GSpin}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{GSpin}_{n_r} | c(g_1) = \cdots = c(g_r)\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_{2n}$. Soient $\mathbf{T}$ le tore diagonal de $\mathbf{G}$ (c'est un tore maximal de $\mathbf{G}$) et $\mathbf{B}$ le sous-groupe de $\mathbf{G}$ formé des matrices triangulaires supérieures (c'est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$). On a un isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{T} & = & \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) | \exists \lambda \in \mathbb{G}_m, \forall i \in \{1, \dots, n\} \lambda_i \lambda_{2n+1-i} = \lambda\} \\ & \simeq & \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m^n \end{array}$$

donné par la formule $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) \longmapsto (\lambda_1 \lambda_{2n}, (\lambda_1, \dots, \lambda_n))$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note e_i le caractère de $\mathbf{T}$ défini par

$$e_i(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) = \lambda_i.$$

Alors le groupe des caractères de $\mathbf{T}$ est

$$X^*(\mathbf{T}) = \mathbb{Z}c \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}e_i.$$

Donc le tore dual de $\mathbf{T}$ est

$$\widehat{\mathbf{T}} = \mathbb{C}^\times \times (\mathbb{C}^\times)^n,$$

avec l'action triviale de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $\widehat{e_i}$ le caractère $(\lambda, (\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \longmapsto \lambda_i$ de $\widehat{\mathbf{T}}$. L'ensemble des racines de $\mathbf{T}$ dans $Lie(\mathbf{G})$ est

$$\Phi = \Phi(\mathbf{T}, \mathbf{G}) = \{\pm(e_i - \frac{c}{2}) \pm (e_j - \frac{c}{2}), 1 \leqslant i < j \leqslant n\} \cup \{\pm(2e_i - c), 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Le sous-ensemble de racines simples déterminé par $\mathbf{B}$ est

$$\Delta = \{\alpha_i := e_i - e_{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant n-1\} \cup \{\alpha_n := 2e_n - c\}.$$

L'ensemble des coracines est

$$\widehat{\Phi} = \{\pm \widehat{e_i} \pm \widehat{e_j}, 1 \leqslant i < j \leqslant n\} \cup \{\pm \widehat{e_i}, 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

En particulier, $Z(\widehat{\mathbf{G}}) = \bigcap_{\widehat{\alpha} \in \widehat{\Phi}} \mathrm{Ker}(\widehat{\alpha}) = \mathbb{C}^\times \times \{1\}$. Le groupe de Weyl de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{G}$ est $\{\pm 1\}^n \rtimes \mathfrak{S}_n$, agissant sur $\mathbf{T} \simeq \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m^n$ par

$$((\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \rtimes \sigma, (\lambda, (\lambda_1, \dots, \lambda_n))) \longmapsto (\lambda, (\lambda \lambda_{\sigma^{-1}(1)}^{\varepsilon_1}, \dots, \lambda \lambda_{\sigma^{-1}(n)}^{\varepsilon_n}))$$

(et sur $\widehat{\mathbf{T}}$ par une formule similaire).

Enfin, le groupe dual de $\mathbf{G}$ est

$$\widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{GSpin}_{2n+1}(\mathbb{C}),$$

avec l'action triviale de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (cf [B] 2.2(5)).

PROPOSITION 2.1.1. *Soit K un corps local ou global de caractéristique 0. Un triplet endoscopique elliptique $(\mathbf{H}, s, \eta_0)$ de $\mathbf{G}_K$ est uniquement déterminé par la donnée de s. On peut supposer que $s \in \widehat{\mathbf{T}}$, et on a forcément $s \in Z(\widehat{\mathbf{G}})(\{1\} \times \{\pm 1\}^n)$ dans ce cas. Un ensemble de représentants des classes d'équivalence de s est*

$$\{s_{n_1} := (\overbrace{1, \dots, 1}^{n_1}, \overbrace{-1, \dots, -1}^{n-n_1}) | 0 \leqslant n_1 \leqslant n, n_1 \neq n-1\},$$

et le groupe endoscopique correspondant à s_{n_1} est

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2n_1} \times \mathbf{SO}_{2(n-n_1)})_K := \{(g_1, g_2) \in \mathbf{GSp}_{2n_1,K} \times \mathbf{GSO}_{2(n-n_1),K} | c(g_1) = c(g_2)\}.$$

Le groupe $\Lambda(\mathbf{H}, s, \eta_0)$ de [K3] 7.5 est égal à $\{\pm 1\}$ si $n - n_1 \geqslant 2$ et à $\{1\}$ si $n = n_1$.

De plus, si $K = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, alors $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ admet un tore maximal elliptique si et seulement si $n - n_1$ est pair.

Soit $(\mathbf{H}, s, \eta_0)$ un triplet endoscopique elliptique de $\mathbf{G}_K$. Comme $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont déployés sur K, on a un prolongement évident de $\eta_0 : \widehat{\mathbf{H}} \longrightarrow \widehat{\mathbf{G}}$ en un L-morphisme $\eta : {}^L\mathbf{H} \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$, qui est $\eta_0 \times id_{W_K}$. Si $\mathbf{H} = \mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2n_1} \times \mathbf{SO}_{2n_2})_K$ (avec $n_1 + n_2 = n$ et $n_2 \neq 1$), alors $\widehat{\mathbf{H}} = \mathbf{G}(\mathbf{Spin}_{2n_1+1} \times \mathbf{Spin}_{2n_2})$.

Démonstration. Comme $\mathbf{G}$ est déployé sur K et de centre connexe, tous ses groupes endoscopiques sont déployés sur K (cf la définition 1.8.1 de [N]). Ceci implique qu'un triplet endoscopique $(\mathbf{H}, s, \eta_0)$ est uniquement déterminé par s.

Soit $(\mathbf{H}, s, \eta_0)$ un triplet endoscopique elliptique de $\mathbf{G}_K$. Comme $\mathbf{H}$ et $\mathbf{G}$ sont déployés sur K, la condition d'ellipticité s'écrit simplement $Z(\widehat{\mathbf{H}})^0 \subset Z(\widehat{\mathbf{G}})$. Quitte à remplacer $(\mathbf{H}, s, \eta_0)$ par un triplet équivalent, on peut supposer que $s \in \widehat{\mathbf{T}}$ et

$$s = (1, (\overbrace{s_1, \dots, s_1}^{n_1}, \dots, \overbrace{s_r, \dots, s_r}^{n_r})),$$

avec $s_1, \dots, s_r \in \mathbb{C}^\times$ deux à deux distincts et $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = n_1 + \dots + n_r$. Supposons qu'il existe $t \in \{1, \dots, r\}$ tel que $s_t \notin \{\pm 1\}$. Quitte à permuter les s_i (ce qui remplace $(\mathbf{H}, s, \eta_0)$ par un triplet équivalent), on peut supposer que $t = r$; on note $n' = n_1 + \dots + n_{r-1}$. Alors le système de coracines $\widehat{\Phi}_H$ de $\mathbf{H}$, qui est l'ensemble des coracines de $\mathbf{G}$ annulant s, vérifie

$$\widehat{\Phi}_H \subset \{\pm \widehat{e_i} \pm \widehat{e_j}, 1 \leqslant i < j \leqslant n'\} \cup \{\pm \widehat{e_i}, 1 \leqslant i \leqslant n'\} \cup \{\pm(\widehat{e_i} - \widehat{e_j}), n'+1 \leqslant i < j \leqslant n\},$$

donc

$$Z(\widehat{\mathbf{H}}) = \bigcap_{\widehat{\alpha} \in \widehat{\Phi}_H} \mathrm{Ker}(\widehat{\alpha}) \supset \mathbb{C}^\times \times \{1\}^{n'} \times (\mathbb{C}^\times)^{n_r}.$$

Ceci contredit le fait que $Z(\widehat{\mathbf{H}})^0 \subset Z(\widehat{\mathbf{G}})$. On en déduit que $s_1, \dots, s_r \in \{\pm 1\}$ (donc que $r \leqslant 2$). Un argument similaire (calcul de $Z(\widehat{\mathbf{H}})$) montre que la multiplicité de -1 dans s ne peut pas être égale à 1. Ceci prouve l'assertion sur la description des classes d'équivalence de s possibles.

Soit $n_1 \in \{1, \dots, n\} - \{n-1\}$, et soit $\mathbf{H}$ le groupe endoscopique associé comme dans l'énoncé. Alors le système de coracines de $\mathbf{H}$ est

$$\widehat{\Phi}_H = \{\pm \widehat{e_i} \pm \widehat{e_j}, 1 \leqslant i < j \leqslant n_1\} \cup \{\pm \widehat{e_i}, 1 \leqslant i \leqslant n_1\} \cup \{\pm \widehat{e_i} \pm \widehat{e_j}, n_1 + 1 \leqslant i < j \leqslant n\},$$

donc le système de racines de $\mathbf{H}$ est isomorphe à

$$\{\pm(e_i - \frac{c}{2}) \pm (e_j - \frac{c}{2}), 1 \leqslant i < j \leqslant n_1\} \cup \{\pm(2e_i - c), 1 \leqslant i \leqslant n_1\} \cup \{\pm(e_i - \frac{c}{2}) \pm (e_j - \frac{c}{2}), n_1 + 1 \leqslant i < j \leqslant n\},$$

c'est-à-dire de type $C_{n_1} \times D_{n-n_1}$. La formule pour $\mathbf{H}$ résulte facilement de ceci. Pour calculer $\Lambda(\mathbf{H}, s, \eta_0)$, on remarque que, si $n \neq n_1$, alors il existe, à translation par $\widehat{\mathbf{H}}$ près, un unique élément $g \in \widehat{\mathbf{G}} - \widehat{\mathbf{H}}$ qui normalise $\widehat{\mathbf{H}}$: c'est un relèvement de l'élément de longueur maximale du groupe de Weyl de B_n.

Enfin, si $K = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, $\mathbf{H}$ admet un $\mathbb{R}$-tore maximal elliptique si et seulement s'il existe un élément de son groupe de Weyl qui agit par -1 sur les éléments d'un ensemble de racines simples. Le système de racines C_{n_1} vérifie cette propriété pour tout n_1, mais D_{n-n_1} ne vérifie cette propriété que si $n - n_1$ est pair.

□

Un calcul de nombres de Tamagawa

Lemme 2.1.2. *(i) Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe déployé sur $\mathbb{Q}$. Alors* $\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, \mathbf{G}) = \{1\}$.

(ii) On a

$$\tau(\mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2n_1} \times \mathbf{SO}_{2n_2})) = \begin{cases} 1 & si\ n_2 = 0 \\ 2 & si\ n_2 \geqslant 2 \end{cases} .$$

(iii) Soient F une extension finie de $\mathbb{Q}$ et $\mathbf{L} = R_{F/\mathbb{Q}}\mathbf{GL}_{n,F}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\tau(\mathbf{L}) = 1$.

Démonstration. Rappelons d'abord que, d'après [K3] 4.2.2 et 5.1.1, [K6] et [C], pour tout groupe algébrique $\mathbf{G}$ réductif connexe sur $\mathbb{Q}$, on a

$$\tau(\mathbf{G}) = |\pi_0(Z(\widehat{\mathbf{G}})^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})})|.|\,\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, \mathbf{G})|^{-1}.$$

(i) D'après [K3] 4.2, on a une bijection canonique $\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, \mathbf{G}) \longrightarrow \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, Z(\widehat{\mathbf{G}}))^D$, donc il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, Z(\widehat{\mathbf{G}})) = \{1\}$. Comme $Z(\widehat{\mathbf{G}})$ est commutatif et que $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ agit trivialement sur $Z(\widehat{\mathbf{G}})$, cela résulte du théorème de densité de Čebotarev.

(ii) D'après le rappel ci-dessus et (i), il suffit de calculer $|\pi_0(Z(\widehat{\mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2n_1} \times \mathbf{SO}_{n_2})}))|$. En raisonnant comme dans la preuve de la proposition 2.1.1, on voit que

$$Z(\widehat{\mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2n_1} \times \mathbf{SO}_{n_2})}) \simeq \begin{cases} \mathbb{C}^\times & \text{si } n_2 = 0 \\ \mathbb{C}^\times \times \{\pm 1\} & \text{si } n_2 \geqslant 2 \end{cases} .$$

La conclusion de (ii) en résulte.

(iii) C'est le (ii) du lemme 2.3.3 de [M2].

□

2.2 Sous-groupes de Levi et groupes endoscopiques

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques notions de la section 7 de [K8]. On utilise les notations et les définitions de la section 7 de [K3].

Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe sur un corps local ou global F. On note $\mathcal{E}(\mathbf{G})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de triplets endoscopiques elliptiques de $\mathbf{G}$ (au sens de [K3] 7.4) et $\mathcal{L}(\mathbf{G})$ l'ensemble des classes de $\mathbf{G}(F)$-conjugaison de sous-groupes de Levi de $\mathbf{G}$. Soit $\mathbf{M}$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$. On a un plongement canonique $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$-équivariant $Z(\widehat{\mathbf{G}}) \longrightarrow Z(\widehat{\mathbf{M}})$.

Définition 2.2.1. ([K8] 7.1) Un $\mathbf{G}$-*triplet endoscopique* de $\mathbf{M}$ est un triplet endoscopique $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0})$ de $\mathbf{M}$ tel que :

(i) l'image de s_M dans $Z(\widehat{\mathbf{M}'})/Z(\widehat{\mathbf{G}})$ soit fixe par $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$;

(ii) l'image de s_M dans $\mathrm{H}^1(F, Z(\widehat{\mathbf{G}}))$ (via le morphisme $(Z(\widehat{\mathbf{M}'})/Z(\widehat{\mathbf{G}}))^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)} \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, Z(\widehat{\mathbf{G}}))$ induit par la suite exacte $1 \longrightarrow Z(\widehat{\mathbf{G}}) \longrightarrow Z(\widehat{\mathbf{M}}) \longrightarrow Z(\widehat{\mathbf{M}})/Z(\widehat{\mathbf{G}}) \longrightarrow 1$) est dans $\mathrm{Ker}^1(F, Z(\widehat{\mathbf{G}}))$.

On dit que $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0})$ est elliptique s'il est elliptique en tant que triplet endoscopique de $\mathbf{M}$.

Soient $(\mathbf{M}'_1, s_1, \eta_{1,0})$ et $(\mathbf{M}'_2, s_2, \eta_{2,0})$ deux $\mathbf{G}$-triplets endoscopiques de $\mathbf{M}$. Un *isomorphisme de* $\mathbf{G}$-*triplets endoscopiques* de $(\mathbf{M}'_1, s_1, \eta_{1,0})$ sur $(\mathbf{M}'_2, s_2, \eta_{2,0})$ est un isomorphisme $\alpha : \mathbf{M}'_1 \longrightarrow \mathbf{M}'_2$ de triplets endoscopiques de $\mathbf{M}$ (au sens de [K3] 7.5) tel que les images de s_1 et $\widehat{\alpha}(s_2)$ dans $Z(\widehat{\mathbf{M}'_1})/Z(\widehat{\mathbf{G}})$ soient égales.

Dans [K8] 3.7 et 7.4, Kottwitz explique comment associer une classe d'isomorphisme de triplets endoscopiques de $\mathbf{G}$ à un $\mathbf{G}$-triplet endoscopique de $\mathbf{M}$ (cette construction est rappelée dans [M2] 2.4). On note $\mathcal{E}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathbf{G}$-triplets endoscopiques elliptiques de $\mathbf{M}$ telles que la classe d'isomorphisme de triplets endoscopiques de $\mathbf{G}$ associée soit elliptique. On a des applications évidentes $\mathcal{E}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M}) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbf{M})$ et $\mathcal{E}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M}) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbf{G})$. Pour tout $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0}) \in \mathcal{E}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$, on note $\mathrm{Aut}(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0})$ le groupe des $\mathbf{G}$-automorphismes de $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0})$ et $\Lambda_{\mathbf{G}}(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0}) = \mathrm{Aut}(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0})/\mathbf{M}'_{ad}(\mathbb{Q})$ le groupe des $\mathbf{G}$-automorphismes extérieurs ; si $\mathbf{M} = \mathbf{G}$, on omet l'indice $\mathbf{G}$.

Rappelons que l'on note $n_M^G = |\,\mathrm{Nor}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})(\mathbb{Q})/\mathbf{M}(\mathbb{Q})|$.

Le lemme 2.2.2 ci-dessous est un cas particulier du lemme 7.2 de [K8]. Comme [K8] n'est pas publié, on le prouve directement par un calcul pour les groupes considérés dans ce texte. On suppose désormais que $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Si $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0}) \in \mathcal{E}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ et $(\mathbf{H}, s, \eta_0)$ est son image dans $\mathcal{E}(\mathbf{G})$, alors on voit facilement que $\mathbf{M}'$ détermine une classe de $\mathbf{H}(\mathbb{Q})$-conjugaison de sous-groupes de Levi de $\mathbf{H}$. (Cette remarque est vraie en général et prouvée dans [K8], mais on n'a pas besoin de ce fait ; cf la note 3 de [M2] 2.4.)

Lemme 2.2.2. *Soit* $\varphi : \coprod_{(\mathbf{H},s,\eta_0)\in\mathcal{E}(\mathbf{G})} \mathcal{L}(\mathbf{H}) \longrightarrow \mathbb{C}$. *Alors*

$$\sum_{(\mathbf{H},s,\eta_0)\in\mathcal{E}(\mathbf{G})} |\Lambda(\mathbf{H}, s, \eta_0)|^{-1} \sum_{\mathbf{M}_H\in\mathcal{L}(\mathbf{H})} (n_{M_H}^H)^{-1}\varphi(\mathbf{H}, \mathbf{M}_H)$$

$$= \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{L}(\mathbf{G})} (n_M^G)^{-1} \sum_{(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0})\in\mathcal{E}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})} |\Lambda_G(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0})|^{-1}\varphi(\mathbf{H}, \mathbf{M}_H),$$

où, dans la deuxième somme, $(\mathbf{H}, s, \eta_0)$ *est l'image de* $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0})$ *dans* $\mathcal{E}(\mathbf{G})$ *et* $\mathbf{M}_H$ *est l'élément de* $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ *associé à* $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0})$.

(On écrira parfois $\mathbf{M}'$ au lieu de $\mathbf{M}_H$, car $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{M}_H$ sont isomorphes.)

Nous n'utiliserons ce lemme que pour des fonctions φ qui s'annulent dès que leur deuxième argument n'est pas un sous-groupe de Levi cuspidal. Dans ce cas, le lemme résulte facilement du lemme ci-dessous, qui se prouve comme la proposition 2.1.1. (Il serait facile aussi mais plus fastidieux de montrer le lemme pour φ quelconque par un calcul explicite.)

Lemme 2.2.3. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *; on note* $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_{2n}$. *On note* $\mathbf{T}$ *le tore diagonal de* $\mathbf{G}$, *et on identifie* $\widehat{\mathbf{T}}$ *à* $\mathbb{C}^\times \times (\mathbb{C}^\times)^n$ *comme dans 2.1. Soit* $\mathbf{M}$ *un sous-groupe de Levi cuspidal de* $\mathbf{G}$. *Alors* $\mathbf{M}$ *est isomorphe à* $\mathbb{G}_m^r \times \mathbf{GL}_2^t \times \mathbf{GSp}_{2m}$, *avec* $m, r, t \in \mathbb{N}$ *tels que* $n = m + r + 2t$. *Soit* $\mathbf{T}_M$ *le tore diagonal de* $\mathbf{M}$. *On choisit un isomorphisme* $\widehat{\mathbf{T}}_M \simeq \widehat{\mathbf{T}}$ *tel que l'ensemble des coracines du facteur* $\mathbf{GSp}_{2m}$ *de* $\mathbf{M}$ *soit* $\{\pm\widehat{e_i} \pm \widehat{e_j}, r + 2t + 1 \leqslant i < j \leqslant n\} \cup \{\pm\widehat{e_i}, r + 2t + 1 \leqslant i \leqslant n\}$ *et celui du facteur* $\mathbf{GL}_2^t$ *soit* $\{\pm(\widehat{e}_{r+2i-1} - \widehat{e}_{r+2i}), 1 \leqslant i \leqslant t\}$ *(les notations sont celles de 2.1).*

Alors un élément $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0})$ *de* $\mathcal{E}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ *est uniquement déterminé par la donnée de* s_M *et si on suppose (comme on peut le faire) que* $s_M \in \widehat{\mathbf{T}}_M \simeq \widehat{\mathbf{T}}$, *on a nécessairement* $s_M \in Z(\widehat{\mathbf{G}})(\{1\} \times \{\pm1\}^n)$. *Pour tous* $A \subset \{1, \ldots, r\}$, $B \subset \{1, \ldots, t\}$ *et* $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ *tels que* $m = m_1 + m_2$ *et* $m_2 \neq 1$, *on note*

$$s_{A,B,m_1,m_2} = (s_1, \ldots, s_r, s'_1, \ldots, s'_{2t}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{m_1}, \overbrace{-1, \ldots, -1}^{m_2}),$$

avec $s_i=-1$ si $i\in A$ et $s_i=1$ si $i\notin A$, et $s'_{2i-1}=s'_{2i}=-1$ si $i\in B$ et $s'_{2i-1}=s'_{2i}=1$ si $i\notin B$. Alors l'ensemble des $(1,s_{A,B,m_1,m_2})$ est un ensemble de représentants des classes d'équivalence de s_M possibles.

Soit $s_M=(1,(s_1,\dots,s_n))\in\{1\}\times\{\pm1\}^n$ dans l'ensemble de représentants ci-dessus. Soit $(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0})$ l'élément de $\mathcal{E}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ associé à s_M, et $(\mathbf{H},s,\eta_0)$ son image dans $\mathcal{E}(\mathbf{G})$. Soient $n_1=|\{i\in\{1,\dots,n\}|s_i=1\}$, $n_2=n-n_1$, $m_1=|\{i\in\{r+2t+1,\dots,n\}|s_i=1\}|$, $m_2=m-m_1$, $r_1=|\{i\in\{1,\dots,r\}|s_i=1\}|$,$r_2=r-r_1$, $t=\frac{1}{2}|\{i\in\{r+1,\dots,r+2t+1\}|s_i=1\}|$, $t_2=t-t_1$ (grâce aux hypothèses sur s_M, t_1 et t_2 sont entiers et n_2 et m_2 différents de 1). Alors $\mathbf{H}=\mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2n_1}\times\mathbf{SO}_{2n_2})$, $\mathbf{M}'=\mathbb{G}_m^r\times\mathbf{GL}_2^t\times\mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2m_1}\times\mathbf{SO}_{2m_2})$, et $n_{M'}^H=2^{r+t}(r_1)!(t_1)!(r_2)!(t_2)!$. Enfin, $|\Lambda_G(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0})|=1$ si $\mathbf{M}\neq\mathbf{G}$.

On finit cette section en rappelant le résultat de [K8] 7.3. On suppose à nouveau que $\mathbf{G}$ est un groupe réductif connexe sur un corps local ou global F. Soit $\mathbf{M}$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$.

Définition 2.2.4. Soit $\gamma\in\mathbf{M}(F)$ semi-simple. Un $\mathbf{G}$-*quadruplet endoscopique* de $(\mathbf{M},\gamma)$ est un quadruplet $(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0},\gamma')$, où $(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0})$ est un $\mathbf{G}$-triplet endoscopique de $\mathbf{M}$ et $\gamma'\in\mathbf{M}'(F)$ est un élément semi-simple $(\mathbf{M},\mathbf{M}')$-régulier tel que γ soit une image de γ' (cf [K5] 3 pour la définition de ces termes). Un *isomorphisme de* $\mathbf{G}$-*quadruplets endoscopiques* $\alpha:(\mathbf{M}'_1,s_{M,1},\eta_{M,0,1},\gamma'_1)\longrightarrow(\mathbf{M}'_2,s_{M,2},\eta_{M,0,2},\gamma'_2)$ est un isomorphisme de $\mathbf{G}$-triplets endoscopiques $\alpha:\mathbf{M}'_1\longrightarrow\mathbf{M}'_2$ tel que $\alpha(\gamma'_1)$ et γ'_2 soient stablement conjugués.

Soit I un sous-groupe réductif connexe de $\mathbf{G}$ qui contient un tore maximal de $\mathbf{G}$. On a une inclusion canonique $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$-équivariante $Z(\widehat{\mathbf{G}})\subset Z(\widehat{I})$. On note $\mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I/F)$ l'ensemble des éléments de $(Z(\widehat{I})/Z(\widehat{\mathbf{G}}))^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}$ dont l'image par le morphisme $(Z(\widehat{I})/Z(\widehat{\mathbf{G}}))^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}\longrightarrow\mathbf{H}^1(F,Z(\widehat{\mathbf{G}}))$ est triviale si F est local, dans $\mathrm{Ker}^1(F,Z(\widehat{\mathbf{G}}))$ si F est global.

Remarque 2.2.5. ([K8] (7.2.1)) Si I est inclus dans $\mathbf{M}$, alors on a une suite exacte

$$1\longrightarrow(Z(\widehat{\mathbf{M}})/Z(\widehat{\mathbf{G}}))^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}\longrightarrow\mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I/F)\longrightarrow\mathfrak{K}_{\mathbf{M}}(I/F)\longrightarrow1.$$

Cette remarque est démontrée dans la preuve du lemme 6.3.4 de [M2].

On fixe $\gamma\in\mathbf{M}(F)$ semi-simple, et on note $I=\mathbf{M}_\gamma$. Soit $(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0},\gamma')$ un $\mathbf{G}$-quadruplet endoscopique de $(\mathbf{M},\gamma)$. On note $I'=\mathbf{M}'_{\gamma'}$. Comme γ' est $(\mathbf{M},\mathbf{M}')$-régulier, I' est une forme intérieure de I (cf [K5] 3), donc on a un isomorphisme canonique $Z(\widehat{I})\simeq Z(\widehat{I'})$. On note $\kappa(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0},\gamma')$ l'image de s_M par le morphisme $Z(\widehat{\mathbf{M}'})\subset Z(\widehat{I'})\simeq Z(\widehat{I})$.

Lemme 2.2.6. *L'application $(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0},\gamma')\longmapsto\kappa(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0},\gamma')$ induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathbf{G}$-quadruplets endoscopiques de $(\mathbf{M},\gamma)$ sur $\mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I/F)$. De plus, tout automorphisme d'un $\mathbf{G}$-quadruplet endoscopique de $(\mathbf{M},\gamma)$ est intérieur.*

Ce lemme est le lemme 7.1 de [K8]. Il s'agit d'une généralisation du lemme 9.7 de [K5], et il se prouve de la même manière que ce lemme.

3. Calculs en la place infinie

3.1 Notations et rappels

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe sur $\mathbb{R}$. Dans cette section, on forme les L-groupes en utilisant le groupe de Weil $W_{\mathbb{R}}$. Rappelons que $W_{\mathbb{R}}=W_{\mathbb{C}}\sqcup W_{\mathbb{C}}\tau$, avec $W_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}^\times$, $\tau^2=-1$ et, pour tout $z\in\mathbb{C}^\times$, $\tau z\tau^{-1}=\overline{z}$, et que $W_{\mathbb{R}}$ agit sur $\widehat{\mathbf{G}}$ via son quotient $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})\simeq W_{\mathbb{R}}/W_{\mathbb{C}}$. On note $\Pi(\mathbf{G}(\mathbb{R}))$ (resp. $\Pi_{temp}(\mathbf{G}(\mathbb{R}))$) l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles (resp. et tempérées) de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. Pour tout $\pi \in \Pi(\mathbf{G}(\mathbb{R}))$, on note Θ_π le caractère de Harish-Chandra de π (c'est une fonction analytique réelle sur $\mathbf{G}_{reg}(\mathbb{R})$).

On suppose maintenant que $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ a une série discrète. Soient $\mathbf{A}_G$ le sous-tore déployé (sur $\mathbb{R}$) maximal du centre de $\mathbf{G}$ et $\overline{\mathbf{G}}$ la forme intérieure de $\mathbf{G}$ telle que $\overline{\mathbf{G}}/\mathbf{A}_G$ soit anisotrope sur $\mathbb{R}$. On pose $q(G) = \dim(X)/2$, où X est l'espace symétrique de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. On note $\Pi_{disc}(\mathbf{G}(\mathbb{R})) \subset \Pi(\mathbf{G}(\mathbb{R}))$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations de la série discrète.

L'ensemble $\Pi_{disc}(\mathbf{G}(\mathbb{R}))$ est réunion disjointe de sous-ensembles finis tous de même cardinal, qui sont appelés L-paquets et paramétrés par les classes d'équivalence de paramètres de Langlands elliptiques $\varphi : W_\mathbb{R} \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$ ou, ce qui revient au même, par les représentations irréductibles de $\overline{\mathbf{G}}(\mathbb{R})$. On note $\Pi(\varphi)$ (resp. $\Pi(E)$) le L-paquet associé au paramètre φ (resp. à la représentation irréductible E de $\overline{\mathbf{G}}(\mathbb{R})$), et $d(\mathbf{G})$ le cardinal des L-paquets de $\Pi_{disc}(\mathbf{G})$. Rappelons que, si E est une représentation irréductible de $\overline{\mathbf{G}}(\mathbb{R})$, alors $\Pi(E)$ est l'ensemble des éléments de $\Pi_{disc}(\mathbf{G}(\mathbb{R}))$ qui ont le même caractère central et le même caractère infinitésimal que E.

Soit $\pi \in \Pi_{disc}(\mathbf{G}(\mathbb{R}))$. On note f_π un pseudo-coefficient de π (cf [CD]).

Pour tout paramètre de Langlands elliptique $\varphi : W_\mathbb{R} \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$, on note

$$S\Theta_\varphi = \sum_{\pi\in\Pi(\varphi)} \Theta_\pi.$$

On va maintenant calculer l'entier $d(\mathbf{G})$ dans le cas des groupes symplectiques.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_{2n}$ et $\mathbf{T}$ le tore diagonal de $\mathbf{G}$. On a $\mathbf{A}_G = \mathbb{G}_m I_{2n}$. Soit

$$\mathbf{T}_{ell} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ & \ddots & \iddots & \\ 0 & a_n & b_n & 0 \\ 0 & -b_n & a_n & 0 \\ & \iddots & \ddots & \\ -b_1 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}, a_1^2+b_1^2 = \dots = a_n^2+b_n^2 \neq 0 \right\}.$$

Alors $\mathbf{T}_{ell}$ est un tore maximal de $\mathbf{G}$, et $\mathbf{T}_{ell}/\mathbf{A}_G$ est anisotrope sur $\mathbb{R}$. Notons

$$u_G = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & iA_n \\ iA_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{C}).$$

La conjugaison par u_G^{-1} induit un isomorphisme $\alpha : \mathbf{T}_{ell,\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}_\mathbb{C}$. On utilise α pour identifier $\widehat{\mathbf{T}}_{ell}$ et $\widehat{\mathbf{T}}$. On note $\Omega_\mathbf{G} = W(\mathbf{T}_{ell}(\mathbb{C}), \mathbf{G}(\mathbb{C}))$ et $\Omega_{\mathbf{G}(\mathbb{R})} = W(\mathbf{T}_{ell}(\mathbb{R}), \mathbf{G}(\mathbb{R}))$ les groupes de Weyl de $\mathbf{T}_{ell}$ sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. On a $\Omega_\mathbf{G} \simeq W(\mathbf{T}(\mathbb{C}), \mathbf{G}(\mathbb{C})) \simeq \{\pm 1\}^n \rtimes \mathfrak{S}_n$, où $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\{\pm1\}^n$ par $(\sigma, (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)) \longmapsto (\varepsilon_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \varepsilon_{\sigma^{-1}(n)})$. Le sous-groupe $\Omega_{\mathbf{G}(\mathbb{R})}$ de $\Omega_\mathbf{G}$ est le groupe engendré par $(-1, \dots, -1) \in \{\pm1\}^n$ et par $\mathfrak{S}_n$, donc $d(\mathbf{G}) = 2^{n-1}$.

Remarque 3.1.1. Soit $E = \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$. On note $\mathbf{U}(1)$ le groupe des éléments de norme 1 de E et $\mathbf{G}(\mathbf{U}(1)^n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in E^\times, \overline{x}_1 x_1 = \dots = \overline{x}_n x_n\}$. Alors le tore $\mathbf{T}_{ell}$ est isomorphe à $\mathbf{G}(\mathbf{U}(1)^n)$ par le morphisme

$$\beta_\mathbf{G} : \begin{pmatrix} diag(a_1, \dots, a_n) & diag(b_1, \dots, b_n)A_n \\ -A_n diag(b_1, \dots, b_n) & diag(a_n, \dots, a_1) \end{pmatrix} \longmapsto (a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n).$$

On aura aussi besoin de connaître un tore maximal elliptique d'un groupe orthogonal. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbf{G} = \mathbf{GSO}_{2n}$ et $\mathbf{T}$ le tore diagonal de $\mathbf{G}$. On a $\mathbf{A}_G = \mathbb{G}_m I_{2n}$. Si n est impair, alors $\mathbf{G}_\mathbb{R}$ n'a pas de tore maximal elliptique. On suppose à partir de maintenant que n est pair, et on note $q=n/2$. On note $\mathbf{T}_{ell}$ le sous-groupe de $\mathbf{G}$ formé des matrices

$$g=\begin{pmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{matrix} & & 0 & 0 & & \begin{matrix} d_1 & c_1 \\ c_1 & -d_1 \end{matrix} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ 0 & & \begin{matrix} a_q & b_q \\ -b_q & a_q \end{matrix} & \begin{matrix} d_q & c_q \\ c_q & -d_q \end{matrix} & & 0 \\ 0 & & \begin{matrix} -d_q & c_q \\ c_q & d_q \end{matrix} & \begin{matrix} a_q & -b_q \\ b_q & a_q \end{matrix} & & 0 \\ & \iddots & & & \ddots & \\ \begin{matrix} -d_1 & c_1 \\ c_1 & d_1 \end{matrix} & & 0 & 0 & & \begin{matrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

avec $a_r,b_r,c_r,d_r\in\mathbb{G}_a$ tels que $a_rc_r+b_rd_r=0$ pour tout $r\in\{1,\dots,q\}$ et $a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2=\dots=a_q^2+b_q^2+c_q^2+d_q^2\neq 0$ (on a $c(g)=a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2$). Alors $\mathbf{T}_{ell}$ est un tore maximal de $\mathbf{G}$, et $\mathbf{T}_{ell}/\mathbf{A}_G$ est anisotrope sur $\mathbb{R}$ (donc $\mathbf{G}$ est cuspidal). Notons

$$u_G=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & i \\ i & -1 \end{matrix} & & 0 & 0 & & \begin{matrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{matrix} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 1 & i \\ i & -1 \end{matrix} & \begin{matrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{matrix} & & 0 \\ 0 & & \begin{matrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{matrix} & \begin{matrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{matrix} & & 0 \\ & \iddots & & & \ddots & \\ \begin{matrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{matrix} & & 0 & 0 & & \begin{matrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}\in\mathbf{SO}_{2n}(\mathbb{C}).$$

La conjugaison par u_G^{-1} induit un isomorphisme $\alpha:\mathbf{T}_{ell,\mathbb{C}}\xrightarrow{\sim}\mathbf{T}_{\mathbb{C}}$. On utilise α pour identifier $\widehat{\mathbf{T}}_{ell}$ et $\widehat{\mathbf{T}}$.

Remarque 3.1.2. Le tore $\mathbf{T}_{ell}$ est isomorphe à $\mathbf{G}(\mathbf{U}(1)^n)$ (ce groupe est défini dans la remarque 3.1.1) par le morphisme β_G qui envoie la matrice g ci-dessus sur

$$(a_1+ib_1+c_1+id_1,a_1+ib_1-c_1-id_1,\dots,a_q+ib_q+c_q+id_q,a_q+ib_q-c_q-id_q).$$

Remarque 3.1.3. Soient $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ et $\mathbf{G}=\mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2n_1}\times\mathbf{SO}_{2n_2})$. Alors $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ ne peut avoir un tore maximal elliptique (sur $\mathbb{R}$) que si n_2 est pair. On suppose que n_2 est pair. En utilisant les exemples ci-dessus, on construit facilement un tore maximal elliptique $\mathbf{T}_{ell}$ de $\mathbf{G}$ (en particulier, $\mathbf{G}$ est cuspidal) et un élément $u_G\in\mathbf{G}_{der}(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{Int}(u_G^{-1})$ envoie $\mathbf{T}_{ell}$ sur le tore diagonal. On obtient aussi un isomorphisme $\beta_G:\mathbf{T}_{ell}\xrightarrow{\sim}\mathbf{G}(\mathbf{U}(1)^{n_1+n_2})$.

Rappelons une construction d'Arthur et Shelstad.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe sur $\mathbb{R}$. Un *caractère virtuel* Θ sur $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de fonctions Θ_π, $\pi\in\Pi(\mathbf{G}(\mathbb{R}))$. On dit que Θ est *stable* si $\Theta(\gamma)=\Theta(\gamma')$ pour tous $\gamma,\gamma'\in\mathbf{G}_{reg}(\mathbb{R})$ stablement conjugués.

Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal de $\mathbf{G}$. On note $\mathbf{A}$ le sous-tore déployé maximal de $\mathbf{T}$ et $\mathbf{M}=\mathrm{Cent}_{\mathbf{G}}(\mathbf{A})$ (un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$). Pour tout $\gamma\in\mathbf{M}(\mathbb{R})$, on note (comme dans 1.2)

$$D_M^G(\gamma)=\det(1-\mathrm{Ad}(\gamma),Lie(\mathbf{G})/Lie(\mathbf{M})).$$

Lemme 3.1.4. *([A] 4.1, [GKM] 4.1) Soit Θ un caractère virtuel stable sur $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. Alors la fonction*
$$\gamma \longmapsto |D_M^G(\gamma)|^{1/2}\Theta(\gamma)$$
sur $\mathbf{T}_{reg}(\mathbb{R})$ s'étend en une fonction continue sur $\mathbf{T}(\mathbb{R})$, qu'on notera $\Phi_M(.,\Theta)$ ou $\Phi_M^G(.,\Theta)$.

Dans la suite, on considérera parfois $\Phi_M(.,\Theta)$ comme une fonction sur $\mathbf{M}(\mathbb{R})$ définie de la manière suivante : si $\gamma \in \mathbf{M}(\mathbb{R})$ est conjugué à $\gamma' \in \mathbf{T}(\mathbb{R})$, alors $\Phi_M(\gamma,\Theta) = \Phi_M(\gamma',\Theta)$; si $\gamma \in \mathbf{M}(\mathbb{R})$ n'a aucun conjugué dans $\mathbf{T}(\mathbb{R})$, alors $\Phi_M(\gamma,\Theta) = 0$.

Remarque 3.1.5. La fonction $\Phi_M(.,\Theta)$ sur $\mathbf{M}(\mathbb{R})$ est invariante par conjugaison par $\mathrm{Nor}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})(\mathbb{R})$ (car Θ et D_M^G le sont).

Soit V une représentation algébrique irréductible de $\mathbf{G}_{\mathbb{C}}$. On peut voir V comme une représentation irréductible de $\overline{\mathbf{G}}(\mathbb{R})$, donc on a un L-paquet $\Pi(V)$ associé à V. On note φ un paramètre de Langlands de $\Pi(V)$. On va rappeler la formule pour $\Phi_M^G(.,S\Theta_\varphi)$ qui est donnée dans [GKM] §4.

On rappelle que, si $(X,X^*,R,R^\vee)$ est un système de racines tel que R engendre X et que -1 soit dans le groupe de Weyl de R, alors on a une fonction $\overline{c}_R : X_{reg}\times X^*_{reg} \longrightarrow \mathbb{Z}$, dont les propriétés sont données (par exemple) dans [GKM] §3. On a noté ici X_{reg} (resp. X^*_{reg}) l'ensemble des éléments réguliers de X (resp. X^*).[1]

On note $\mathcal{B}(\mathbf{T})$ l'ensemble des sous-groupes de Borel de $\mathbf{G}_{\mathbb{C}}$ contenant $\mathbf{T}$, et on fixe $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(\mathbf{T})$. Pour tout $\mathbf{B}' \in \mathcal{B}(\mathbf{T})$, on pose $\rho_{\mathbf{B}'} = \frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha\in\Phi(\mathbf{T},\mathbf{B}')}\alpha \in X^*(\mathbf{T})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, $\Delta_{\mathbf{B}'} = \prod\limits_{\alpha\in\Phi(\mathbf{T},\mathbf{B}')}(1-\alpha^{-1})$, et on note $\lambda_{\mathbf{B}'}$ le plus haut poids de V relativement à $\mathbf{B}'$. On note $\Phi^+ = \Phi(\mathbf{T},\mathbf{B})$. Soit Ω le groupe de Weyl de $\mathbf{T}(\mathbb{C})$ dans $\mathbf{G}(\mathbb{C})$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $\Phi(\omega) = \Phi^+ \cap (-\omega\Phi^+)$, $\ell(\omega) = |\Phi(\omega)|$ la longueur de ω, $\varepsilon(\omega) = (-1)^{\ell(\omega)}$. Le groupe Ω agit simplement transitivement sur $\mathcal{B}(\mathbf{T})$. Si $\mathbf{B}' \in \mathcal{B}(\mathbf{T})$ est égal à $\omega\mathbf{B}$, alors $\rho_{\mathbf{B}'} = \omega\rho_{\mathbf{B}}$ et $\lambda_{\mathbf{B}'} = \omega\lambda_{\mathbf{B}}$.

Soit $\mathbf{T}(\mathbb{R})_1$ le sous-groupe compact maximal de $\mathbf{T}(\mathbb{R})$. On a $\mathbf{T}(\mathbb{R}) \simeq \mathbf{A}(\mathbb{R})^0 \times \mathbf{T}(\mathbb{R})_1$. On note $p : X^*(\mathbf{T})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R} \longrightarrow X^*(\mathbf{A})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ le morphisme induit par la restriction. Comme V est irréductible, le tore central $\mathbf{A}_G$ de $\mathbf{G}$ agit sur V par un caractère, que l'on note λ_0. Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $X^*(\mathbf{A}_G)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ est de manière naturelle un facteur direct de $X^*(\mathbf{T})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, donc on peut aussi voir λ_0 comme un élément de $X^*(\mathbf{T})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$.

On note R l'ensemble des racines réelles dans Φ. Soit $\gamma \in \mathbf{T}(\mathbb{R})$. On note $R_\gamma = \{\alpha \in R | \alpha(\gamma) > 0\}$, $R_\gamma^+ = \{\alpha \in R | \alpha(\gamma) > 1\}$ et $\varepsilon_R(\gamma) = (-1)^{\Phi^+\cap(-R_\gamma^+)}$. On écrit $\gamma = \exp(x)\gamma_1$, avec $x \in X_*(\mathbf{A})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R} = Lie(\mathbf{A})$ et $\gamma_1 \in \mathbf{T}(\mathbb{R})_1$, et on suppose que $\gamma \in \mathbf{T}_{reg}(\mathbb{R})$. On définit des entiers $n(\gamma,\mathbf{B}')$, $\mathbf{B}' \in \mathcal{B}(\mathbf{T})$, de la manière suivante : Si γ n'est pas dans $Z(\mathbf{G})(\mathbb{R})Im(\mathbf{G}_{sc}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{G}(\mathbb{R}))$, alors $n(\gamma,\mathbf{B}') = 0$ pour tout $\mathbf{B}' \in \mathcal{B}(\mathbf{T})$ ($Z(\mathbf{G})$ est le centre de $\mathbf{G}$, et $\mathbf{G}_{sc} \longrightarrow \mathbf{G}_{der}$ est le rêvetement universel du groupe dérivé $\mathbf{G}_{der}$ de $\mathbf{G}$). Sinon, alors -1 est dans le groupe de Weyl de R_γ (cf [GKM] §4), donc R_γ donne une fonction
$$\overline{c} = \overline{c}_{R_\gamma} : (X_*(\mathbf{A}/\mathbf{A}_G)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R})_{reg} \times (X^*(\mathbf{A}/\mathbf{A}_G)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R})_{reg} \longrightarrow \mathbb{Z},$$
et, pour tout $\mathbf{B}' \in \mathcal{B}(\mathbf{T})$, on pose
$$n(\gamma,\mathbf{B}') = \overline{c}(x, p(\lambda_{\mathbf{B}'} + \rho_{\mathbf{B}'} - \lambda_0)).$$

Enfin, on note $\mathbf{P}$ le sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ de sous-groupe de Levi $\mathbf{M}$ qui contient $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}_M = \mathbf{B}\cap\mathbf{M}$ (un sous-groupe de Borel de $\mathbf{M}$). Comme le tore maximal $\mathbf{T}$ de $\mathbf{M}$ est tel que $\mathbf{T}/\mathbf{A}$ est elliptique (sur $\mathbb{R}$), $\mathbf{P}$ est défini sur $\mathbb{Q}$ (cf [GKM] §5).

1. La définition d'un élément régulier de X^* est celle de la section 3 de [GKM].

Fait 3.1.6. *On a*

$$\mathrm{Tr}(\gamma,V)=\sum_{\mathbf{B}'\in\mathcal{B}(\mathbf{T})}\lambda_{\mathbf{B}'}(\gamma)^{-1}\Delta_{\mathbf{B}'}(\gamma)^{-1}=\Delta_{\mathbf{B}}(\gamma)^{-1}\sum_{\omega\in\Omega}\varepsilon(\omega)(\omega\lambda_{\mathbf{B}})(\gamma)\prod_{\alpha\in\Phi(\omega)}\alpha^{-1}(\gamma),$$

$$S\Theta_\varphi(\gamma)=(-1)^{q(\mathbf{G})}\sum_{\mathbf{B}'\in\mathcal{B}(\mathbf{T})}n(\gamma,\mathbf{B}')\lambda_{\mathbf{B}'}(\gamma)\Delta_{\mathbf{B}'}(\gamma)^{-1}$$

et $\Phi_M^G(\gamma,S\Theta_\varphi)$ *est égal à*

$$(-1)^{q(\mathbf{G})}\varepsilon_R(\gamma)\delta^{1/2}_{\mathbf{P}(\mathbb{R})}(\gamma)\Delta_{\mathbf{B}_M}(\gamma)^{-1}\sum_{\omega\in\Omega}\varepsilon(\omega)n(\gamma,\omega\mathbf{B})(\omega\lambda_{\mathbf{B}})(\gamma)\prod_{\alpha\in\Phi(\omega)}\alpha^{-1}(\gamma).$$

Démonstration. La première formule pour $\mathrm{Tr}(\gamma,V)$ est celle de [GKM] §4 (c'est la formule du caractère de Weyl) ; la deuxième formule s'en déduit immédiatement. La formule pour $S\Theta_\varphi$ est celle de [GKM] §4. Pour en déduire la formule pour $\Phi_M^G(\gamma,S\Theta_\varphi)$, il suffit de montrer que

$$|D_M^G(\gamma)|^{1/2}=\delta^{1/2}_{\mathbf{P}(\mathbb{R})}(\gamma)\Delta_{\mathbf{B}}(\gamma)\Delta_{\mathbf{B}_M}(\gamma)^{-1}(-1)^{|\Phi^+\cap(-R_\gamma^+)|}.$$

Or on a

$$D_M^G(\gamma)=\det(1-\mathrm{Ad}(\gamma),Lie(\mathbf{G})/Lie(\mathbf{M}))=\prod_{\alpha\in\Phi^+-\Phi(\mathbf{T},\mathbf{B}_M)}(-\alpha(\gamma))(1-\alpha^{-1}(\gamma))^2,$$

donc

$$|D_M^G(\gamma)|^{1/2}=\prod_{\alpha\in\Phi^+-\Phi(\mathbf{T},\mathbf{B}_M)}|\alpha(\gamma)|^{1/2}|1-\alpha^{-1}(\gamma)|=\delta^{1/2}_{\mathbf{P}(\mathbb{R})}(\gamma)|\Delta_{\mathbf{B}}(\gamma)\Delta_{\mathbf{B}_M}(\gamma)^{-1}|.$$

Toutes les racines imaginaires de $\mathbf{T}$ sont dans $\Phi(\mathbf{T},\mathbf{M})$, donc une racine dans $\Phi^+-\Phi(\mathbf{T},\mathbf{B}_M)$ est soit complexe, soit réelle. Soit $\alpha\in\Phi^+-\Phi(\mathbf{T},\mathbf{B}_M)$. Si α est complexe, alors il existe $\alpha'\in\Phi^+-\Phi(\mathbf{T},\mathbf{B}_M)$, $\alpha'\neq\alpha$, telle que $(1-\alpha^{-1}(\gamma))(1-\alpha'^{-1}(\gamma))=|1-\alpha^{-1}(\gamma)|^2>0$. Si α est réelle, alors $1-\alpha^{-1}(\gamma)<0$ si et seulement si $\alpha\in -R_\gamma^+$. Ceci finit la preuve.

$\square$

Remarque 3.1.7. Si $\mathbf{G}=\mathbf{GSp}_{2n}$, alors le groupe dérivé de $\mathbf{G}$ est simplement connexe, donc $Im(\mathbf{G}_{sc}(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbf{G}(\mathbb{R}))$ est simplement $\mathbf{G}_{der}(\mathbb{R})$. On voit facilement qu'un élément g de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ est dans $Z(\mathbf{G})(\mathbb{R})\mathbf{G}_{der}(\mathbb{R})$ si et seulement si $c(g)>0$.

3.2 Transfert

Rappelons d'abord quelques définitions de [K7] §7.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe sur $\mathbb{Q}$. Pour tout tore maximal $\mathbf{T}$ de $\mathbf{G}$, on note $\mathcal{B}_G(\mathbf{T})$ l'ensemble des sous-groupes de Borel de $\mathbf{G}_{\mathbb{C}}$ contenant $\mathbf{T}$. On suppose que $\mathbf{G}$ a un tore maximal $\mathbf{T}_G$ tel que $(\mathbf{T}_G/\mathbf{A}_G)_{\mathbb{R}}$ soit anisotrope, et on note $\overline{\mathbf{G}}$ une forme intérieure de $\mathbf{G}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\overline{\mathbf{G}}/\mathbf{A}_{G,\mathbb{R}}$ soit anisotrope. On note $\Omega_G=W(\mathbf{T}_G(\mathbb{C}),\mathbf{G}(\mathbb{C}))$. Soit $\varphi:W_{\mathbb{R}}\longrightarrow {}^L\mathbf{G}$ un paramètre de Langlands elliptique.

Soit $(\mathbf{H},s,\eta_0)$ un triplet endoscopique elliptique de $\mathbf{G}$. On suppose qu'il existe un L-morphisme $\eta:{}^L\mathbf{H}\longrightarrow{}^L\mathbf{G}$ qui prolonge $\eta_0:\widehat{\mathbf{H}}\longrightarrow\widehat{\mathbf{G}}$ (ceci est vrai si $\mathbf{G}_{der}$ est simplement connexe d'après la proposition 1 de [Lan1]), et on note $\Phi_H(\varphi)$ l'ensemble des classes d'équivalence de paramètres de Langlands $\varphi_H:W_{\mathbb{R}}\longrightarrow{}^L\mathbf{H}$ tels que $\eta\circ\varphi_H$ et φ soient équivalents. On suppose que le tore $\mathbf{T}_G$ provient d'un tore maximal $\mathbf{T}_H$ de $\mathbf{H}$, et on fixe un isomorphisme admissible $j:\mathbf{T}_H\xrightarrow{\sim}\mathbf{T}_G$ (ie obtenu comme à la fin de [Lan2] II.4). On note $\Omega_H=W(\mathbf{T}_H(\mathbb{C}),\mathbf{H}(\mathbb{C}))$. On a $j_*(\Phi(\mathbf{T}_H,\mathbf{H}))\subset\Phi(\mathbf{T}_G,\mathbf{G})$, donc j induit une application $j^*:\mathcal{B}_G(\mathbf{T}_G)\longrightarrow\mathcal{B}_H(\mathbf{T}_H)$ et un morphisme injectif $\Omega_H\longrightarrow\Omega_G$, qu'on utilise pour identifier Ω_H à un sous-groupe de Ω_G.

Soient $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_G(\mathbf{T}_G)$ et $\mathbf{B}_H = j^*(\mathbf{B})$. On note

$$\begin{aligned}\Omega_* &= \{\omega \in \Omega_G | j^*(\omega(\mathbf{B})) = \mathbf{B}_H\} \\ &= \{\omega \in \Omega_G | \omega^{-1}(j_*(\Phi(\mathbf{T}_H, \mathbf{B}_H))) \subset \Phi(\mathbf{T}_G, \mathbf{B})\}.\end{aligned}$$

Alors, pour tout $\omega \in \Omega_G$, il existe un unique couple $(\omega_H, \omega_*) \in \Omega_H \times \Omega_*$ tel que $\omega = \omega_H \omega_*$. De plus, on a une bijection $\Phi_H(\varphi) \xrightarrow{\sim} \Omega_*$: à un élément $\varphi_H \in \Phi_H(\varphi)$, on associe l'unique $\omega_*(\varphi_H) \in \Omega_*$ tel que $(\omega_*(\varphi_H))^{-1} \circ j, \mathbf{B}, \mathbf{B}_H)$ soit aligné avec φ_H (au sens de [K7] §7 p 184).

Le sous-groupe de Borel $\mathbf{B}$ définit aussi un L-morphisme $\eta_B : {}^L\mathbf{T}_G \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$, unique à conjugaison par $\widehat{\mathbf{G}}$ près (cf [K7] p 183). Ce morphisme vérifie $\eta_B(W_{\mathbb{C}}) \subset {}^L\mathbf{G}_{ad} \subset {}^L\mathbf{G}$ et, pour tout $z \in W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$, $\eta_B(z) = \eta_B(z^\rho \overline{z}^{-\rho}) \rtimes z$, où $\rho = \rho_B$ et où on utilise les conventions de [K7] p 183 (ou [B] 9.1) pour noter les morphismes $\mathbb{C}^\times \longrightarrow \widehat{\mathbf{T}}_G$.

Rappelons la normalisation des facteurs de transfert utilisée dans [K7] §7.

DÉFINITION 3.2.1. Avec les notations ci-dessus, on pose, pour tout $\gamma_H \in \mathbf{T}_H(\mathbb{R})$,

$$\Delta_{j,B}(\gamma_H, \gamma) = (-1)^{q(\mathbf{G})+q(\mathbf{H})} \chi_B(\gamma) \prod_{\alpha \in \Phi(\mathbf{T}_G, \mathbf{B}) - j_*(\Phi(\mathbf{T}_H, \mathbf{B}_H))} (1 - \alpha(\gamma^{-1})),$$

où $\gamma = j(\gamma_H)$ et χ_B est le quasi-caractère de $\mathbf{T}_G(\mathbb{R})$ associé au 1-cocycle $a : W_{\mathbb{R}} \longrightarrow \widehat{\mathbf{T}}_G$ tel que $\eta \circ \eta_{B_H} \circ \widehat{j}$ et $\eta_B.a$ soient conjugués par $\widehat{\mathbf{G}}$.

Remarques 3.2.2. (1) Soit $\varphi_H \in \Phi_H(\varphi)$ tel que $\omega_*(\varphi_H) = 1$. Quitte à conjuguer φ (resp. φ_H) par $\widehat{\mathbf{G}}$ (resp. $\widehat{\mathbf{H}}$), on peut écrire $\varphi = \eta_B \circ \varphi_B$ (resp. $\varphi_H = \eta_{B_H} \circ \varphi_{B_H}$), où φ_B (resp. φ_{B_H}) est un paramètre de Langlands pour $\mathbf{T}_G$ (resp. $\mathbf{T}_H$). On note $\chi_{\varphi,B}$ (resp. χ_{φ_H,B_H}) le quasi-caractère de $\mathbf{T}_G(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbf{T}_H(\mathbb{R})$) associé à φ_B (resp. φ_{B_H}). Alors $\chi_B = \chi_{\varphi,B}(\chi_{\varphi_H,B_H} \circ j^{-1})^{-1}$.

(2) Soit $\omega \in \Omega_G$. On écrit $\omega = \omega_H \omega_*$, avec $\omega_H \in \Omega_H$ et $\omega_* \in \Omega_*$. On note, comme dans 3.1, $\Phi(\omega) = \Phi(\mathbf{T}_G, \mathbf{B}) \cap (-\omega \Phi(\mathbf{T}_G, \mathbf{B}))$ et $\Phi_H(\omega_H) = \Phi(\mathbf{T}_H, \mathbf{B}_H) \cap (-\omega_H \Phi(\mathbf{T}_H, \mathbf{B}_H))$. Alors

$$\chi_B \chi_{\omega(B)}^{-1} = \left(\prod_{\alpha \in j_* \Phi_H(\omega_H)} \alpha \right) \left(\prod_{\alpha \in \Phi(\omega)} \alpha \right)^{-1}.$$

On en déduit en particulier que $\Delta_{j,\omega(B)} = \varepsilon(\omega_*) \Delta_{j,B}$.

Comme dans 3.1, on fixe une représentation algébrique irréductible V de $\mathbf{G}_{\mathbb{C}}$, et on note φ un paramètre de Langlands du L-paquet associé à V. On note λ le plus haut poids de V relativement à $\mathbf{B}$. Remarquons que la restriction de λ à $\mathbf{T}_G(\mathbb{R})$ est égale au quasi-caractère $\chi_{\varphi,B}$ du point (1) de la remarque ci-dessus.

On peut supposer que $\varphi(W_{\mathbb{C}}) \subset \widehat{\mathbf{T}}_G$ et que la restriction de φ à $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$ est de la forme $z \longmapsto z^{\lambda+\rho} \overline{z}^\mu$, où $\mu \in X^*(\mathbf{T}_G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ est tel que $\lambda + \rho - \mu \in X^*(\mathbf{T}_G)$. Comme dans la définition 3.2.1 ci-dessus, on note $a : W_{\mathbb{R}} \longrightarrow \widehat{\mathbf{T}}_G$ le 1-cocycle tel que $\eta \circ \eta_{B_H} \circ \widehat{j}$ et $\eta_B.a$ soient conjugués par $\widehat{\mathbf{G}}$.

La proposition ci-dessous est immédiate.

PROPOSITION 3.2.3. *On suppose que le quasi-caractère χ_B de $\mathbf{T}_G(\mathbb{R})$ associé au 1-cocycle a est algébrique (d'après le (2) de la remarque 3.2.2 ci-dessus, cette condition est indépendante du choix de $\mathbf{B}$). Pour tout $\omega_* \in \Omega_*$, on note V_{H,ω_*} la représentation algébrique irréductible de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ de plus haut poids $(\omega_* \lambda - \chi_{\omega_* B}) \circ j$ relativement à $\mathbf{B}_H$ et φ_{H,ω_*} un paramètre de Langlands du L-paquet de la série discrète de $\mathbf{H}(\mathbb{R})$ associé à V_{H,ω_*}. Alors $\Phi_H(\varphi) = \{\varphi_{H,\omega_*}, \omega_* \in \Omega_*\}$. Si de plus la restriction de χ_B à $\mathbf{A}_G$ est triviale (par exemple, si η envoie ${}^L\mathbf{H}_{ad}$ dans ${}^L\mathbf{G}_{ad}$), alors $\mathbf{A}_G$ agit par le même caractère sur V et sur les V_{H,ω_*}, $\omega_* \in \Omega_*$ (on identifie $\mathbf{A}_G$ à un sous-groupe de $\mathbf{H}$ en utilisant j).*

On remarque que les conditions de la proposition sont vérifiées pour les groupes symplectiques si on choisit les morphismes η comme dans 2.1 (sous la proposition 2.1.1) et 5.3 (cf l'exemple 3.2.4

ci-dessous). En fait, comme $(\mathbf{T}_G/\mathbf{A}_G)$ est anisotrope sur $\mathbb{R}$, χ_B est algébrique si et seulement si sa restriction à $\mathbf{A}_G(\mathbb{R})$ est algébrique (ce qui est vrai en particulier si cette restriction est triviale).

Exemple 3.2.4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que n_2 soit pair et $n = n_1 + n_2$. On pose $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_{2n}$, et on prend pour $(\mathbf{H}, s, \eta_0)$ le triplet endoscopique elliptique de $\mathbf{G}$ associé à n_1 comme dans la proposition 2.1.1 (donc $\mathbf{H} = \mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2n_1} \times \mathbf{Sp}_{2n_2})$). On choisit le prolongement évident η de η_0.

On a défini dans 3.1 des tores maximaux elliptiques $\mathbf{T}_G = \mathbf{T}_{G,ell}$ et $\mathbf{T}_H = \mathbf{T}_{H,ell}$ de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$, et des isomorphismes $\beta_G : \mathbf{T}_G \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}(\mathbf{U}(1)^n)$ et $\beta_H : \mathbf{T}_H \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}(\mathbf{U}(1)^n)$. On prend $j = \beta_G^{-1} \circ \beta_H : \mathbf{T}_H \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}_G$. On a aussi défini $u_G \in \mathbf{G}(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{Int}(u_G^{-1})$ envoie $\mathbf{T}_{G,\mathbb{C}}$ sur le tore diagonal de $\mathbf{G}_\mathbb{C}$, et on utilise la conjugaison par u_G pour identifier Ω_G et $\{\pm 1\}^n \rtimes \mathfrak{S}_n$. Avec cette identification, on a $\Omega_H = \Omega_1 \times \Omega_2$, où $\Omega_1 = \{\pm 1\}^{n_1} \rtimes \mathfrak{S}_{n_1}$ et $\Omega_2 = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_2}) \in \{\pm 1\}^{n_2} | \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n_2} = 1\} \rtimes \mathfrak{S}_{n_2}$ (le groupe $\Omega_1 \times \Omega_2$ se plonge de manière évidente dans $\{\pm 1\}^n \rtimes \mathfrak{S}_n$).

Soit

$$\mathbf{B} = \mathrm{Int}(u_G) \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_\mathbf{G}(\mathbf{T}_G).$$

Alors Ω_* est l'ensemble des $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \rtimes \sigma$ dans $\{\pm 1\}^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ tels que $\sigma^{-1}_{|\{1,\dots,n_1\}}$ et $\sigma^{-1}_{|\{n_1+1,\dots,n\}}$ soient croissants et que $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{n-1} = 1$. On pourrait aussi donner une description explicite de la bijection $\Phi_H(\varphi) \xrightarrow{\sim} \Omega_*$, comme dans la remarque 3.3.3 de [M2].

Calculons le 1-cocyle a de la définition 3.2.1. Soit $\mathbf{B}_H = j^*\mathbf{B}$. On choisit des plongements $\widehat{\mathbf{T}}_G \subset \widehat{\mathbf{G}}$ et $\widehat{\mathbf{T}}_H \subset \widehat{\mathbf{H}}$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathbf{H}} \arrow[r, "\eta_0"] & \widehat{\mathbf{G}} \\ \widehat{\mathbf{T}}_H \arrow[u] & \widehat{\mathbf{T}}_G \arrow[l, "\sim", "\widehat{j}"'] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

On peut supposer que les restrictions de η_B et η_{B_H} à $\widehat{\mathbf{T}}_G$ et $\widehat{\mathbf{T}}_H$ sont données par ces plongements. Les restrictions de η_B et η_{B_H} à $W_\mathbb{C}$ sont déterminées par la définition des ces morphismes. Enfin, on a $\eta_B(\tau) = \Phi_G \times \tau$ (resp. $\eta_{B_H}(\tau) = \Phi_H \times \tau$), où Φ_G (resp. Φ_H) est un relèvement dans $\widehat{\mathbf{G}}$ (resp. $\widehat{\mathbf{T}}$) de l'élément $(-1, \dots, -1) \rtimes 1$ (resp. $((-1, \dots, -1) \rtimes 1) \times ((-1, \dots, -1) \rtimes 1)$) du groupe de Weyl $W(\widehat{\mathbf{T}}_G, \widehat{\mathbf{G}}) \simeq \{\pm 1\}^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ (resp. $W(\widehat{\mathbf{T}}_H, \widehat{\mathbf{H}}) \simeq \Omega_1 \times \Omega_2$). On peut choisir Φ_G et Φ_H tels que $\eta_0(\Phi_H) = \Phi_G$. On a alors $a(\tau) = 1$, et la restriction de a à $W_\mathbb{C}$ est $z \longmapsto z^{\rho_{B_H} - \rho_B} \overline{z}^{\rho_B - \rho_{B_H}}$. Donc le quasi-caractère χ_B de $\mathbf{T}_G(\mathbb{R})$ associé à a est le caractère (algébrique) $(\rho_{B_H} \circ j^{-1})\rho_B^{-1}$ (on remarque que ρ_B et ρ_{B_H} sont des caractères). Autrement dit, on a

$$\chi_B \circ \mathrm{Int}(u_\mathbf{G})(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) = (\lambda_1 \dots \lambda_{n_1})^{n_2} \lambda_{n_1+1} \dots \lambda_n.$$

On suppose à nouveau que $\mathbf{G}$ est quelconque. Soit $\mathbf{M}$ un sous-groupe de Levi cuspidal de $\mathbf{G}$, et soit $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0}) \in \mathcal{E}_\mathbf{G}(\mathbf{M})$ (cf 2.2) dont l'image dans $\mathcal{E}(\mathbf{G})$ est $(\mathbf{H}, s, \eta_0)$. On a une classe de conjugaison de sous-groupes de Levi de $\mathbf{H}$ associée à $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0})$, et on note $\mathbf{M}_H$ un élément de cette classe ; on suppose que $\mathbf{M}_H$ est cuspidal. On fixe des tores maximaux elliptiques $\mathbf{T}_M$ et $\mathbf{T}_{M_H}$ de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_H$. On fixe $u_M \in \mathbf{G}(\mathbb{C})$ et $u_{M_H} \in \mathbf{H}(\mathbb{C})$ tels que $u_M^{-1}\mathbf{T}_M(\mathbb{C})u_M = \mathbf{T}_G(\mathbb{C})$ et $u_{M_H}^{-1}\mathbf{T}_{M_H}(\mathbb{C})u_{M_H} = \mathbf{T}_H(\mathbb{C})$, et on suppose qu'il existe un isomorphisme admissible $j_M : \mathbf{T}_{M_H} \xrightarrow{\sim}$

$\mathbf{T}_M$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_{M,\mathbb{C}} \arrow[r, "\mathrm{Int}(u_M^{-1})"] & \mathbf{T}_{G,\mathbb{C}} \\ \mathbf{T}_{M_H,\mathbb{C}} \arrow[u, "j_M"] \arrow[r, "\mathrm{Int}(u_{M_H}^{-1})"'] & \mathbf{T}_{H,\mathbb{C}} \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

L'isomorphisme j_M induit comme ci-dessus des applications $j_{M*} : \Phi(\mathbf{T}_{M_H}, \mathbf{H}) \longrightarrow \Phi(\mathbf{T}_M, \mathbf{G})$ et $j_M^* : \mathcal{B}_G(\mathbf{T}_M) \longrightarrow \mathcal{B}_H(\mathbf{T}_{M_H})$ (et des applications similaires si on remplace $\mathbf{G}$ par $\mathbf{M}$ et $\mathbf{H}$ par $\mathbf{M}_H$). On utilise la conjugaison par u_M (resp. u_{M_H}) pour identifier Ω_G (resp. Ω_H) et $W(\mathbf{T}_M(\mathbb{C}), \mathbf{G}(\mathbb{C}))$ (resp. $W(\mathbf{T}_{M_H}(\mathbb{C}), \mathbf{H}(\mathbb{C}))$). Si $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_G(\mathbf{T}_M)$, on lui associe le sous-ensemble $\Omega_* \subset \Omega_G$ et la bijection $\Phi_H(\varphi) \xrightarrow{\sim} \Omega_*$ définis par $\mathrm{Int}(u_M^{-1})(\mathbf{B}) \in \mathcal{B}_G(\mathbf{T}_G)$.

On note R (resp. R_H) l'ensemble des racines réelles de $\Phi(\mathbf{T}_M, \mathbf{G})$ (resp. $\Phi(\mathbf{T}_{M_H}, \mathbf{H})$). On a $j_{M*}(R_H) \subset R$. Si $\gamma \in \mathbf{T}_M(\mathbb{R})$ et $\gamma_H \in \mathbf{T}_{M_H}(\mathbb{R})$, on définit des signes $\varepsilon_R(\gamma)$ et $\varepsilon_{R_H}(\gamma_H)$ comme dans 3.1. Soit $\gamma \in \mathbf{T}_{M,reg}(\mathbb{R})$. On définit des entiers $n_H(\gamma, \mathbf{B})$, $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(\mathbf{T}_M)$, de manière similaire aux entiers $n(\gamma, \mathbf{B})$ de 3.1, mais en utilisant $j_{M*}(R_H)$ au lieu de R (si $j_M^{-1}(\gamma)$ n'est pas dans $Z(\mathbf{H})(\mathbb{R})Im(\mathbf{H}_{sc}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{H}(\mathbb{R}))$, on prend $n_H(\gamma, \mathbf{B}) = 0$ pour tout $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(\mathbf{T}_M)$). On définit une fonction $S\Theta_\varphi^H$ sur $\mathbf{T}_{M,reg}(\mathbb{R})$ en utilisant la formule du fait 3.1.6 pour $S\Theta_\varphi$ où on a remplacé $n(\gamma, \mathbf{B})$ par $n_H(\gamma, \mathbf{B})$. La preuve du lemme 4.1 de [GKM] s'adapte facilement à ce cas et implique que la fonction $\Phi_M^G(., S\Theta_\varphi^H) := |D_M^G|^{1/2} S\Theta_\varphi^H$ se prolonge par continuité à $\mathbf{T}_M(\mathbb{R})$.

D'après [K8] p 23, le morphisme η détermine un L-morphisme $\eta_M : {}^L\mathbf{M}_H = {}^L\mathbf{M}' \longrightarrow {}^L\mathbf{M}$, unique à conjugaison par $\widehat{\mathbf{M}}$ près, et qui prolonge $\eta_{M,0}$.[2] On utilise ce morphisme η_M pour définir des facteurs de transfert $\Delta_{j_M, \mathbf{B}_M}$, pour tout $\mathbf{B}_M \in \mathcal{B}_M(\mathbf{T}_M)$: pour tout $\gamma_H \in \mathbf{T}_{M_H}(\mathbb{R})$, on pose

$$\Delta_{j_M, \mathbf{B}_M}(\gamma_H, \gamma) = (-1)^{q(\mathbf{G})+q(\mathbf{H})} \chi_{\mathbf{B}_M}(\gamma) \prod_{\alpha \in \Phi(\mathbf{T}_M, \mathbf{B}_M) - j_{M*}(\Phi(\mathbf{T}_{M_H}, \mathbf{B}_{M_H}))} (1 - \alpha(\gamma^{-1}))$$

(noter le signe), où $\gamma = j_M(\gamma_H)$, $\mathbf{B}_{M_H} = j_M^*(\mathbf{B}_M)$ et χ_{B_M} est le quasi-caractère de $\mathbf{T}_M(\mathbb{R})$ associé au 1-cocyle $a_M : W_{\mathbb{R}} \longrightarrow \widehat{\mathbf{T}}_M$ tel que $\eta_M \circ \eta_{B_{M_H}} \circ \widehat{j}_M$ et $\eta_{B_M}.a_M$ soient conjugués par $\widehat{\mathbf{M}}$.

La proposition suivante est une généralisation des calculs de [K7] p 186.

Proposition 3.2.5. *On suppose que la condition de la proposition 3.2.3 sur η est vérifiée. On fixe $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_G(\mathbf{T}_M)$ (qui détermine Ω_* et $\Phi_H(\varphi) \xrightarrow{\sim} \Omega_*$), et on note $\mathbf{B}_M = \mathbf{B} \cap \mathbf{M}$. Soient $\gamma_H \in \mathbf{T}_{M_H}(\mathbb{R})$ et $\gamma = j_M(\gamma_H)$. Alors :*

$$\varepsilon_R(\gamma^{-1}) \varepsilon_{R_H}(\gamma_H^{-1}) \Delta_{j_M, B_M}(\gamma_H, \gamma) \Phi_M^G(\gamma^{-1}, S\Theta_\varphi^H) = \sum_{\varphi_H \in \Phi_H(\varphi)} \varepsilon(\omega_*(\varphi_H)) \Phi_{M_H}^H(\gamma_H^{-1}, S\Theta_{\varphi_H}).$$

Remarque 3.2.6. Comme $\Delta_{j_M, B_M}(\gamma_H, \gamma) = 0$ si γ_H n'est pas $(\mathbf{M}, \mathbf{M}_H)$-régulier, le terme de droite dans l'égalité de la proposition est non nul seulement si γ_H est $(\mathbf{M}, \mathbf{M}_H)$-régulier.

Remarque 3.2.7. Pour les groupes unitaires de [M2] 2.1, on a toujours $j_{M*}(R_H) = R$. La proposition 3.3.4 de [M2] est donc un cas particulier de la proposition ci-dessus.

Démonstration de la proposition. Soient $\mathbf{B}_H = j_M^* \mathbf{B}$ et $\mathbf{B}_{M_H} = j_M^* \mathbf{B}_M$. Soit $\mathbf{P}$ (resp. $\mathbf{P}_H$) le sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ (resp. $\mathbf{H}$) de sous-groupe de Levi $\mathbf{M}$ (resp. $\mathbf{M}_H$) et contenant $\mathbf{B}$ (resp. $\mathbf{B}_H$). On note $\Phi^+ = \Phi(\mathbf{T}_M, \mathbf{B})$, $\Phi_M^+ = \Phi(\mathbf{T}_M, \mathbf{B}_M)$, $\Phi_H^+ = \Phi(\mathbf{T}_{M_H}, \mathbf{B}_H)$ et $\Phi_{M_H}^+ = \Phi(\mathbf{T}_{M_H}, \mathbf{B}_{M_H})$. Soit $\mathbf{B}_0 = \mathrm{Int}(u_M)\mathbf{B} \in \mathcal{B}_G(\mathbf{T}_G)$. D'après les hypothèses, le caractère χ_{B_0} de $\mathbf{T}_G(\mathbb{R})$ est algébrique.

2. Si $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_{2n}$, il existe un choix évident pour ce morphisme, puisque $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$ sont déployés sur $\mathbb{Q}$.

On note χ_B le caractère $\chi_{B_0}\circ j_M$ de $\mathbf{T}_M$, et on définit de même un caractère $\chi_{\omega(B)}$, pour tout $\omega\in\Omega$. Il résulte des définitions que la quasi-caractère χ_{B_M} de $\mathbf{T}_M(\mathbb{R})$ est égal à $\chi_B \prod_{\alpha\in\Phi^+-(\Phi_M^+\cup\Phi_H^+)}|\alpha|^{1/2} = \chi_B\delta^{1/2}_{\mathbf{P}(\mathbb{R})}(\delta^{-1/2}_{\mathbf{P}_H(\mathbb{R})}\circ j_M^{-1})$.

Comme $j_M^{-1}(\mathbf{T}_{M,reg}(\mathbb{R}))$ est dense dans $\mathbf{T}_{M_H}(\mathbb{R})$ et que les deux côtés de l'égalité à prouver sont des fonctions continues, on peut supposer que γ est régulier dans $\mathbf{G}$. Le facteur de transfert $\Delta_{j_M,\mathbf{B}_M}(\gamma_H,\gamma)$ est alors égal à

$$(-1)^{q(\mathbf{G})+q(\mathbf{H})}\chi_B(\gamma)\delta^{1/2}_{\mathbf{P}(\mathbb{R})}(\gamma)\delta^{-1/2}_{\mathbf{P}_H(\mathbb{R})}(\gamma_H)\Delta_{B_M}(\gamma^{-1})\Delta_{B_{M_H}}(\gamma_H^{-1})^{-1}.$$

Soient $\varphi_H\in\Phi_H(\varphi)$ et $\omega_*=\omega_*(\varphi_H)$. D'après le fait 3.1.6, on a

$$\Phi^H_{M_H}(\gamma_H^{-1},S\Theta_{\varphi_H})=(-1)^{q(\mathbf{H})}\varepsilon_{R_H}(\gamma_H^{-1})\delta^{-1/2}_{\mathbf{P}_H(\mathbb{R})}(\gamma_H)\Delta_{B_{M_H}}(\gamma_H^{-1})^{-1}$$
$$\sum_{\omega_H\in\Omega_H}\varepsilon(\omega_H)n(\gamma_H^{-1},\omega_H\mathbf{B}_H)((\omega_H\omega_*\lambda)(\omega_H\chi_{\omega_*B})^{-1})(\gamma^{-1})\prod_{\alpha\in\Phi_H(\omega_H)}\alpha(\gamma_H).$$

Or $n(\gamma_H^{-1},\omega_H\mathbf{B}_H)=n_H(\gamma^{-1},\omega_H\omega_*\mathbf{B})$ et

$$(\omega_H\chi_{\omega_*B})(\gamma)=\chi_{\omega_H\omega_*B}(\gamma)=\chi_B(\gamma)\prod_{\alpha\in\Phi(\omega_H\omega_*)}\alpha(\gamma)\prod_{\alpha\in\Phi_H(\omega_H)}\alpha^{-1}(\gamma_H)$$

(cf la remarque 3.2.2), donc $\varepsilon_R(\gamma^{-1})\varepsilon_{R_H}(\gamma_H^{-1})\Delta_{j_M,\mathbf{B}_M}(\gamma_H,\gamma)^{-1}\varepsilon(\omega_*)\Phi^H_{M_H}(\gamma_H^{-1},S\Theta_{\varphi_H})$ est égal à

$$(-1)^{q(\mathbf{G})}\varepsilon_R(\gamma^{-1})\delta^{-1/2}_{\mathbf{P}(\mathbb{R})}(\gamma)\sum_{\omega_H\in\Omega_H}\varepsilon(\omega_H\omega_*)n_H(\gamma^{-1},\omega_H\omega_*\mathbf{B})(\omega_H\omega_*\lambda)(\gamma^{-1})\prod_{\alpha\in\Phi(\omega_H\omega_*)}\alpha(\gamma).$$

Ceci implique le résultat cherché.

□

Exemple 3.2.8. On utilise les notations du lemme 2.2.3. On a $\mathbf{M}\simeq\mathbb{G}_m^r\times\mathbf{GL}_2^t\times\mathbf{GSp}_{2m}$, avec $r+2t+m=n$. Soit $\mathbf{T}_M$ un tore maximal elliptique de $\mathbf{M}_\mathbb{R}$. On a $\mathbf{T}_M=\mathbb{G}^r_{m,\mathbb{R}}\times\mathbf{T}_1\times\dots\times\mathbf{T}_t\times\mathbf{T}$, où $\mathbf{T}_1,\dots,\mathbf{T}_t$ sont des tores maximaux elliptiques de $\mathbf{GL}_{2,\mathbb{R}}$ et $\mathbf{T}$ est un tore maximal elliptique de $\mathbf{GSp}_{2m,\mathbb{R}}$. Pour tout $i\in\{1,\dots,r\}$, on note $e_i:\mathbf{T}_M\longrightarrow\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ la projection sur le i-ième facteur $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$. Pour tout $j\in\{1,\dots,t\}$, on note $\alpha_j:\mathbf{T}_M\longrightarrow\mathbb{G}_m$ le composé de la projection sur le facteur $\mathbf{T}_j$ et du morphisme $\det:\mathbf{T}_j\longrightarrow\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$. Alors l'ensemble R des racines réelles de $\mathbf{T}_M$ dans $\mathbf{GSp}_{2n,\mathbb{R}}$ est égal à $\{\pm(e_i-e_{i'}),1\leqslant i<i'\leqslant r\}\cup\{\pm(e_i+e_{i'}+c),1\leqslant i\leqslant i'\leqslant r\}\cup\{\pm(\alpha_1+c)\}\cup\dots\cup\{\pm(\alpha_t+c)\}$. Donc R est de type $C_r\times A_1^t$. Soit $j\in\{1,\dots,t\}$. Le quotient de $\mathbf{T}_j$ par le centre $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}I_2$ de $\mathbf{GL}_{2,\mathbb{R}}$ est anisotrope sur $\mathbb{R}$, donc $(\mathbf{T}_j/\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}I_2)(\mathbb{R})$ est connexe. On en déduit que $\alpha_j(g)>0$ pour tout $g\in\mathbf{T}_M(\mathbb{R})$.

On suppose que s_M est égal à l'élément $(1,s_{A,B,m_1,m_2})$ défini dans le lemme 2.2.3 ($A\subset\{1,\dots,r\}$, $B\subset\{1,\dots,t\}$, $m_1,m_2\in\mathbb{N}$ tels que $m_2\neq1$ et $m=m_1+m_2$). Alors $\mathbf{M}_H\simeq\mathbb{G}_m^r\times\mathbf{GL}_2^t\times\mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2m_1}\times\mathbf{SO}_{2m_2})$. Comme $\mathbf{M}_H$ est cuspidal, m_2 est forcément pair. On peut supposer que $\mathbf{T}_{M_H}=\mathbb{G}^r_{m,\mathbb{R}}\times\mathbf{T}_1\times\dots\times\mathbf{T}_t\times\mathbf{T}'$, où $\mathbf{T}'$ est un tore maximal elliptique de $\mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2m_1}\times\mathbf{SO}_{2m_2})$, et que $j_M:\mathbf{T}_{M_H}\xrightarrow{\sim}\mathbf{T}_M$ est l'identité sur $\mathbb{G}^r_{m,\mathbb{R}}\times\mathbf{T}_1\times\dots\times\mathbf{T}_t$. On note $A_1=\{1,\dots,r\}-A$ et $A_2=A$. Alors l'image par j_{M*} de l'ensemble R_H des racines réelles de $\mathbf{T}_{M_H}$ dans $\mathbf{H}$ est $\{\pm(e_i-e_{i'}),i<i',i,i'\in A_1\}\cup\{\pm(e_i+e_{i'}+c),i,i'\in A_1\}\cup\{\pm(e_i-e_{i'}),i<i',i,i'\in A_2\}\cup\{\pm(e_i+e_{i'}+c),i<i',i,i'\in A_2\}\cup\{\pm(\alpha_1+c)\}\cup\dots\cup\{\pm(\alpha_t+c)\}$. Donc $j_{M*}(R_H)$ est de type $C_{r_1}\times D_{r_2}\times A_1^t$, où $r_1=|A_1|$ et $r_2=|A_2|$. On voit aussi que $j_{M*}(R_H)=R$ si et seulement si $r_2=0$.

On se place dans la situation de l'exemple ci-dessus. On suppose de plus que $\mathbf{M}$ est standard et que l'isomorphisme $\mathbf{M} \simeq \mathbb{G}_m^r \times \mathbf{GL}_2^t \times \mathbf{GSp}_{2m}$ est, à l'ordre des facteurs dans la partie linéaire près, celui défini dans 1.1. On note $\Omega^{\mathbf{M}}$ le groupe d'automorphismes de $\mathbf{M}$ engendré par les automorphismes suivants :

- pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, le morphisme

$$u_i : (\lambda_1, \dots, \lambda_r, g_1, \dots, g_t, g) \longmapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, c(g)^{-1}\lambda_i^{-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r, g_1, \dots, g_t, g),$$

- pour tout $j \in \{1, \dots, t\}$, le morphisme

$$v_j : (\lambda_1, \dots, \lambda_r, g_1, \dots, g_t, g) \longmapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_r, g_1, \dots, g_{j-1}, c(g)^{-1}A_2{}^t g_j^{-1}A_2, g_{j+1}, \dots, , g_t, g),$$

($\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{G}_m$, $g_1, \dots, g_t \in \mathbf{GL}_2$, $g \in \mathbf{GSp}_{2m}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Z})$). Alors $\Omega^{\mathbf{M}}$ agit sur $\mathbf{M}$ par conjugaison par des éléments de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$. On fait agir $\Omega^{\mathbf{M}}$ sur $\mathbf{M}_H \simeq \mathbb{G}_m^r \times \mathbf{GL}_2^t \times \mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2m_1} \times \mathbf{SO}_{2m_2})$ par les mêmes formules. On note $\varepsilon_\kappa : \Omega^{\mathbf{M}} \longrightarrow \{\pm 1\}$ le morphisme qui envoie les $v_1, \dots, v_t$ sur 1 et tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $\varepsilon_\kappa(u_i) = -1$ si et seulement si $i \in A$. On voit facilement qu'un élément ω de $\Omega^{\mathbf{M}}$ agit sur $\mathbf{M}_H$ par conjugaison par un élément de $\mathbf{H}(\mathbb{Q})$ si et seulement si $\varepsilon_\kappa(\omega) = 1$.

Corollaire 3.2.9. *On se place dans la situation de la proposition 3.2.5, et on définit une fonction $\psi : \mathbf{M}_H(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ par la formule suivante : pout tout $\gamma_H \in \mathbf{M}_H(\mathbb{R})$,*

$$\psi(\gamma_H) = \sum_{\varphi_H \in \Phi_H(\varphi)} \varepsilon(\omega_*(\varphi_H))\Phi^H_{M_H}(\gamma_H^{-1}, S\Theta_{\varphi_H}).$$

Alors, pour tous $\gamma_H \in \mathbf{M}_H(\mathbb{R})$ et $\omega \in \Omega^{\mathbf{M}}$, on a

$$\psi(\omega(\gamma_H)) = \varepsilon_\kappa(\omega)\psi(\gamma_H).$$

Démonstration. Comme $\mathrm{Ker}(\varepsilon_\kappa)$ agit sur $\mathbf{M}_H$ par conjugaison par des éléments de $\mathbf{H}(\mathbb{Q})$ et que ψ est clairement invariante par conjugaison par $\mathbf{H}(\mathbb{R})$, il suffit de montrer l'égalité du corollaire pour un $\omega \in \Omega^{\mathbf{M}}$ tel que $\varepsilon_\kappa(\omega) = -1$, par exemple $\omega = u_i$, avec $i \in A$.

Soit $\gamma_H \in \mathbf{M}_H(\mathbb{R})$. Si γ_H n'est pas elliptique ou n'a pas d'image dans $\mathbf{M}(\mathbb{R})$, alors il en est de meme de $\omega(\gamma_H)$, et $\psi(\gamma_H) = \psi(\omega(\gamma_H)) = 0$. On peut donc supposer qu'il existe des tores maximaux elliptiques $\mathbf{T}_M$ et $\mathbf{T}_{M_H}$ de $\mathbf{M}_\mathbb{R}$ et $\mathbf{M}_{H,\mathbb{R}}$ et un isomorphisme $j_M : \mathbf{T}_{M_H} \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}_M$ comme ci-dessus tels que $\gamma_H \in \mathbf{T}_{M_H}(\mathbb{R})$. On note $\gamma = j_M(\gamma_H)$; il est clair que $u_i(\gamma) = j_M(u_i(\gamma_H))$. D'après la proposition 3.2.5,

$$\psi(\gamma_H) = \varepsilon_R(\gamma^{-1})\varepsilon_{R_H}(\gamma_H^{-1})\Delta_{j_M,B_M}(\gamma_H, \gamma)\Phi^G_M(\gamma^{-1}, S\Theta^H_\varphi).$$

On voit facilement, en utilisant le fait que $j_{M*}(R_H^+)$ est stable par u_i, que $\Phi^G_M(\gamma^{-1}, S\Theta^H_\varphi) = \Phi^G_M(u_i(\gamma)^{-1}, S\Theta^H_\varphi)$. Il est tout aussi facile de vérifier que $\Delta_{j_M,B_M}(u_i(\gamma_H), u_i(\gamma)) = \Delta_{j_M,B_M}(\gamma_H, \gamma)$. Il suffit donc de montrer que :

$$\varepsilon_R(u_i(\gamma)^{-1})\varepsilon_{R_H}(u_i(\gamma_H)^{-1}) = -\varepsilon_R(\gamma^{-1})\varepsilon_{R_H}(\gamma_H^{-1}).$$

Il est facile de voir que u_i fait changer de signe exactement une racine de R_γ^+ ($2e_i + c$ ou $-(2e_i + c)$, avec les notations de l'exemple 3.2.8), donc $\varepsilon_R(u_i(\gamma)^{-1}) = -\varepsilon_R(\gamma^{-1})$. Comme $i \in A$, cette racine n'est pas dans $j_{M*}(R_H)$, donc u_i préserve R^+_{H,γ_H}, et $\varepsilon_{R_H}(u_i(\gamma_H)^{-1}) = \varepsilon_{R_H}(\gamma_H^{-1})$. Ceci finit la preuve. $\square$

3.3 Calcul de certains $\Phi_M(\gamma,\Theta)$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $\mathbf{G}=\mathbf{GSp}_{2n}$. Soient $\mathbf{M}$ un sous-groupe de Levi cuspidal standard de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{P}$ le sous-groupe parabolique standard de $\mathbf{G}$ de sous-groupe de Levi $\mathbf{M}$. On note $\mathbf{B}$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathbf{G}$ (c'est un sous-groupe de Borel contenu dans $\mathbf{P}$). On note $\mathbf{M}_l$ la partie linéaire de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_h$ sa partie hermitienne. Soit $\mathbf{T}_M$ un $(\mathbb{R})$-tore maximal ($\mathbb{R}$-)elliptique de $\mathbf{M}_\mathbb{R}$. On note R l'ensemble des racines réelles de $\mathbf{T}_M$ dans $\mathbf{G}$, et R^+ l'ensemble des racines de R qui sont positives pour l'ordre donné par $\mathbf{P}$.

Soit $\gamma_M\in\mathbf{T}_M(\mathbb{R})$. On note $I=\mathbf{M}_{\gamma_M}$. On fixe $\kappa_M\in\mathfrak{K}_\mathbf{M}(I/\mathbb{R})$, et on note $(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0},\gamma')$ le $\mathbf{M}$-quadruplet endoscopique de $(\mathbf{M},\gamma_M)$ associé à κ_M (cf la fin de 2.2 ; on remarque que γ' est $(\mathbf{M},\mathbf{M}')$-régulier par construction). Pour tout $\kappa\in\mathfrak{K}_\mathbf{G}(I/\mathbb{R})$, on note $(\mathbf{M}'_\kappa,s_{M,\kappa},\eta_{M,\kappa,0},\gamma'_\kappa)$ le $\mathbf{G}$-quadruplet endoscopique de $(\mathbf{M},\gamma_M)$ associé à κ, et $(\mathbf{H}_\kappa,s_\kappa,\eta_{\kappa,0})$ le triplet endoscopique de $\mathbf{G}$ associé à $(\mathbf{M}'_\kappa,s_{M,\kappa},\eta_{M,\kappa,0})$ (même référence). Si l'image de κ par l'application naturelle $\mathfrak{K}_\mathbf{G}(I/\mathbb{R})\longrightarrow\mathfrak{K}_\mathbf{M}(I/\mathbb{R})$ est κ_M, alors il existe un isomorphisme $\mathbf{M}'_\kappa\simeq\mathbf{M}'$ qui envoie γ'_κ sur γ', et on peut supposer que $\eta_{M,0}=\eta_{M,\kappa,0}$ et $s_MZ(\widehat{\mathbf{M}})=s_{M,\kappa}Z(\widehat{\mathbf{M}})$. On note $\mathfrak{K}_\mathbf{G}(I/\mathbb{R})_e$ l'ensemble des $\kappa\in\mathfrak{K}_\mathbf{G}(I/\mathbb{R})$ tels que :

- les triplets endoscopiques $(\mathbf{H}_\kappa,s_\kappa,\eta_{\kappa,0})$ et $(\mathbf{M}'_\kappa,s_{M,\kappa},\eta_{M,\kappa,0})$ sont elliptiques ;
- les groupes $\mathbf{M}'_\kappa$ et $\mathbf{H}_\kappa$ admettent des $\mathbb{R}$-tores maximaux elliptiques (sur $\mathbb{R}$).

Soient $r,t,m\in\mathbb{N}$ tels que $\mathbf{M}_l\simeq\mathbb{G}_m^r\times\mathbf{GL}_2^t$ et $\mathbf{M}_h\simeq\mathbf{GSp}_{2m}$; on a $n=r+2t+m$. Pour tout $i\in\{1,\dots,r\}$, on note $e_i:\mathbf{M}\longrightarrow\mathbb{G}_m$ la projection sur le i-ième facteur $\mathbb{G}_m$. Pour tout $j\in\{1,\dots,t\}$, on note $\alpha_j:\mathbf{M}\longrightarrow\mathbb{G}_m$ le composé de la projection sur le j-ième facteur $\mathbf{GL}_2$ et du morphisme det : $\mathbf{GL}_2\longrightarrow\mathbb{G}_m$.

Soient $m_1,m_2\in\mathbb{N}$ tels que $m=m_1+m_2$, $m_2\neq1$ et $\mathbf{M}'=\mathbf{M}_l\times\mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2m_1}\times\mathbf{SO}_{2m_2})$. Comme $\mathbf{M}'$ contient un $\mathbb{R}$-tore maximal elliptique sur $\mathbb{R}$, m_2 est forcément pair. On peut supposer que $s_M=(1,s_{\varnothing,\varnothing,m_1,m_2})$, où les notations sont celles du lemme 2.2.3. Alors il résulte facilement de ce lemme et de la remarque 2.2.5 que $\{\kappa\in\mathfrak{K}_\mathbf{G}(I/\mathbb{R})_e|\kappa\longmapsto\kappa_M\}$ s'identifie à l'ensemble des $(1,s_{A,B,m_1,m_2})$, avec $A\subset\{1,\dots,r\}$ tel que $|A|$ soit pair et $B\subset\{1,\dots,t\}$. Pour tout $s=(s_1,\dots,s_n)\in\{\pm1\}^n$, il existe une unique permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma^{-1}_{|\{i\in\{1,\dots,n\}|s_i=1\}}$ et $\sigma^{-1}_{|\{i\in\{1,\dots,n\}|s_i=-1\}}$ soient croissantes et que $\sigma.s:=(s_{\sigma^{-1}(1)}\dots,s_{\sigma^{-1}(n)})$ soit de la forme $(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$; on la note $\sigma(s)$. Si $\kappa\in\mathfrak{K}_\mathbf{G}(I/\mathbb{R})_e$ et $(1,s_{A,B,m_1,m_2})$ est associé à κ comme ci-dessus, on note $\varepsilon(\kappa)$ la signature de $\sigma(s_{A,B,m_1,m_2})$ et, pour tout $C\subset\{1,\dots,t\}$, on note $\varepsilon_C(\kappa)=(-1)^{|B\cap C|}$.

Proposition 3.3.1. *Soit V une représentation algébrique irréductible de $\mathbf{G}$. Soit $\varphi:W_\mathbb{R}\longrightarrow{}^L\mathbf{G}$ un paramètre de Langlands du L-paquet de la série discrète de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ associé à la contragrédiente de V. Si $c(\gamma_M)<0$ (ce qui peut arriver seulement si $\mathbf{M}_h$ est un tore), alors $\Phi^{\mathbf{H}_\kappa}_{\mathbf{M}'_\kappa}({\gamma'_\kappa}^{-1},S\Theta_{\varphi_H})=0$ pour tout $\kappa\in\mathfrak{K}_\mathbf{G}(I/\mathbb{R})_e$ et tout paramètre de Langlands elliptique φ_H de $\mathbf{H}_\kappa$. On suppose que $c(\gamma_M)>0$, et on fixe $\kappa_M\in\mathfrak{K}_M(I/\mathbb{R})$ et $(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0},\gamma')$ comme plus haut.*

(i) Soit $C\subset\{1,\dots,t\}$ non vide. Alors

$$\sum_{\substack{\kappa\in\mathfrak{K}_\mathbf{G}(I/\mathbb{R})_e\\ \kappa\longmapsto\kappa_M}}\Delta^\mathbf{M}_{\mathbf{M}',s_{M,\kappa},\infty}(\gamma',\gamma_M)^{-1}\varepsilon(\kappa)\varepsilon_C(\kappa)\sum_{\varphi_H\in\Phi_{H_\kappa}(\varphi)}\varepsilon(\omega_*(\varphi_H))\Phi^{\mathbf{H}_\kappa}_{\mathbf{M}'}({\gamma'}^{-1},S\Theta_{\varphi_H})=0.$$

(ii) Si $e_i(\gamma_M)^2c(\gamma_M)\leqslant1$ et $\alpha_j(\gamma_M)c(\gamma_M)\leqslant1$ pour tous $i\in\{1,\dots,r\}$ et $j\in\{1,\dots,t\}$, alors :

$$2^{r+t}\frac{k(\mathbf{M})}{k(\mathbf{G})}(n_M^G)^{-1}(-1)^{q(\mathbf{G})+\dim(\mathbf{A}_M/\mathbf{A}_G)}\sum_{\substack{\kappa\in\mathfrak{K}_\mathbf{G}(I/\mathbb{R})_e\\ \kappa\longmapsto\kappa_M}}\Delta^\mathbf{M}_{\mathbf{M}',s_{M,\kappa},\infty}(\gamma',\gamma_M)^{-1}\varepsilon(\kappa)$$
$$\sum_{\varphi_H\in\Phi_{H_\kappa}(\varphi)}\varepsilon(\omega_*(\varphi_H))\Phi^{\mathbf{H}_\kappa}_{\mathbf{M}'}({\gamma'}^{-1},S\Theta_{\varphi_H})=L_M(\gamma_M),$$

où $L_M(\gamma_M)$ est défini dans 1.2 (on utilise $\mathbf{B}$ pour former les bijections $\varphi_H\longmapsto\omega_*(\varphi_H)$ dans *le membre de gauche).*[3]

On utilise la normalisation des facteurs de transfert de 3.2. Les notations $\Phi(\varphi)$, $\omega_*(\varphi_H)$, $S\Theta_{\varphi_H}$ et $\Phi^{\mathbf{H}_\kappa}_{\mathbf{M}'}$ sont définies dans 3.1 et 3.2, et les notations $k(\mathbf{M})$, $k(\mathbf{G})$ et n^G_M sont définies dans 5.2.

Démonstration. Si $c(\gamma_M) < 0$, alors, pour tout $\kappa \in \mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I/\mathbb{R})_e$, on a $c(\gamma'_\kappa) = c(\gamma_M) < 0$, donc $\gamma'_k \notin Z(\mathbf{H}_\kappa)(\mathbb{R})Im(\mathbf{H}_{\kappa,sc}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{H}_\kappa(\mathbb{R}))$. Ceci prouve l'annulation de tous les $\Phi^{\mathbf{H}_\kappa}_{\mathbf{M}'_\kappa}(\gamma_\kappa'^{-1}, S\Theta_{\varphi_H})$. On écrit $\gamma_M = (\gamma_l, \gamma_h)$, avec $\gamma_l \in \mathbf{M}_l(\mathbb{R})$ et $\gamma_h \in \mathbf{M}_h(\mathbb{R})$. Alors $c(\gamma_M) = c(\gamma_h)$. Soit $\mathbf{T}$ un $\mathbb{R}$-tore maximal elliptique de $\mathbf{M}_h$ tel que $\gamma_h \in \mathbf{T}(\mathbb{R})$. Alors $\mathbf{T}/(\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}I_{2m})$ est anisotrope sur $\mathbb{R}$, donc le groupe de ses $\mathbb{R}$-points est connexe. On suppose que $\mathbf{M}_h$ n'est pas un tore, c'est-à-dire que $m > 0$. Alors la restriction de c à $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}I_{2m}$ est $\lambda I_{2m} \longmapsto \lambda^2$, donc envoie le groupe des $\mathbb{R}$-points de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}I_{2m}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$, et on a $c(\mathbf{T}(\mathbb{R})) \subset \mathbb{R}^{+*}$. Donc $c(\gamma_M) > 0$.

On suppose à partir de maintenant que $c(\gamma_M) > 0$ (avec m quelconque), et on utilise librement les notations de 1.2. Soit $\mathbf{T}_M$ (resp. $\mathbf{T}_{M'}$) un $\mathbb{R}$-tore maximal elliptique de $\mathbf{M}$ (resp. $\mathbf{M}'$) tel que $\gamma_M \in \mathbf{T}_M(\mathbb{R})$ (resp. $\gamma' \in \mathbf{T}_{M'}(\mathbb{R})$). Comme dans l'exemple 3.2.8, on écrit $\mathbf{T}_M = \mathbb{G}^r_{m,\mathbb{R}} \times \mathbf{T}_1 \times \cdots \times \mathbf{T}_t \times \mathbf{T}$ et $\mathbf{T}_{M'} = \mathbb{G}^r_{m,\mathbb{R}} \times \mathbf{T}_1 \times \cdots \times \mathbf{T}_t \times \mathbf{T}'$, et on choisit $j_M : \mathbf{T}_{M'} \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}_M$ qui est l'identité sur $\mathbb{G}^r_{m,\mathbb{R}} \times \mathbf{T}_1 \times \cdots \times \mathbf{T}_t$. On peut supposer que $\gamma_M = j_M(\gamma')$.

Soient $A \subset \{1, \dots, r\}$ et $B \subset \{1, \dots, t\}$ tels que $|A|$ soit pair. On note $s_{A,B} = (1, s_{A,B,m_1,m_2})$ et, si κ correspond à $s_{A,B}$, on note $\mathbf{H}_{A,B} = \mathbf{H}_\kappa$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ l'unique permutation telle que $\sigma^{-1}_{|A}$ et $\sigma^{-1}_{|\{1,\dots,r\}-A}$ soient croissantes et $\sigma^{-1}(A) = \{n+1-|A|, \dots, n\}$; on note $\varepsilon(A)$ la signature de σ. On voit facilement (en utilisant le fait que $|A|$ est pair) que $\varepsilon(\kappa) = \varepsilon(A)$. Donc le membre de gauche de l'égalité du point (i) (resp. (ii)) de la proposition est égal à (resp. au produit de $2^{r+t}k(\mathbf{M})k(\mathbf{G})^{-1}(n^G_M)^{-1}(-1)^{q(\mathbf{G})+\dim(\mathbf{A}_M/\mathbf{A}_G)}$ et de)

$$\sum_{A,B} \Delta^{\mathbf{M}}_{\mathbf{M}',s_{A,B},\infty}(\gamma', \gamma_M)^{-1}\varepsilon(A)(-1)^{|B\cap C|} \sum_{\varphi_H \in \Phi_{H_{A,B}}(\varphi)} \varepsilon(\omega_*(\varphi_H))\Phi^{\mathbf{H}_{A,B}}_{\mathbf{M}'}(\gamma'^{-1}, S\Theta_{\varphi_H})$$

(resp. la même somme mais sans le facteur $(-1)^{|B\cap C|}$), où A parcourt l'ensemble des sous-ensembles de cardinal pair de $\{1, \dots, r\}$ et B parcourt l'ensemble des sous-ensembles de $\{1, \dots, t\}$. En particulier, les membres de gauche dans (i) et (ii) sont des fonctions continues de $\gamma_M \in \mathbf{T}_M(\mathbb{R})$. Il est clair que les membres de droite sont aussi des fonctions continues de γ_M. On peut donc supposer que γ_M est $\mathbf{G}$-régulier, et dans (ii), on peut supposer que $e_i(\gamma_M)^2c(\gamma_M) < 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et que $\alpha_j(\gamma_M)c(\gamma_M) < 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, t\}$.

On note $MG^{(i)} = MG^{(i)}(\gamma_M, V, C)$ (resp. $MG = MG(\gamma_M, V)$, resp. $MD = MD(\gamma_M, V)$) le membre de gauche de l'égalité de (i) (resp. le membre de gauche de l'égalité de (ii), resp. le membre de droite de l'égalité de (ii)).

Calculons $MG^{(i)}$ et MG. On remarque d'abord que $MG^{(i)}(\gamma_M, V, C) = MG^{(i)}(\gamma_M^{-1}, V^*, C)$ (où V^* est la contragrédiente de V). Donc, quitte à remplacer φ par un paramètre de Langlands du L-paquet de la série discrète de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ associé à V, on peut remplacer γ_M et γ' par γ_M^{-1} et γ'^{-1} dans le membre de gauche.

On a $n^G_M = 2^r r! 2^t t!$ et, d'après le lemme 5.2.2, $k(\mathbf{G}) = 2^{n-1}$ et $k(\mathbf{M}) = 2^{m-1}$ si $m \geqslant 1$ (si $m = 0$, on a $\mathbf{M} = \mathbb{G}^r_m \times \mathbf{GL}^t_2 \times \mathbb{G}_m$, donc $k(\mathbf{M}) = 1$). Donc

$$(n^G_M)^{-1}\frac{k(\mathbf{M})}{k(\mathbf{G})} = m_P 2^{-2r-3t}(r!)^{-1}(t!)^{-1}$$

3. Si $e_i(\gamma_M)^2c(\gamma_M) \geqslant 1$ et $\alpha_j(\gamma_M)c(\gamma_M) \geqslant 1$ pour tous $i \in \{1, \dots, r\}$ et $j \in \{1, \dots, t\}$, on a un énoncé similaire en remplaçant tout les $\mathrm{H}^*(Lie(\mathbf{N}_Q), V)_{>0}$ dans la définition de $L_M(\gamma_M)$ par des $\mathrm{H}^*(Lie(\mathbf{N}_Q), V)_{<0}$.

(d'après la définition de m_P dans 1.2, on a $m_P = 1$ si $m \geqslant 1$ et $m_P = 2$ si $m = 0$), donc

$$MG = m_P 2^{-r-2t}(r!)^{-1}(t!)^{-1}(-1)^{q(\mathbf{G})+\dim(\mathbf{A}_M/\mathbf{A}_G)} MG^{(i)}(\gamma_M, V, \varnothing).$$

On a (cf l'exemple 3.2.8) $R = \{\pm(e_i - e_j), 1 \leqslant i < j \leqslant r\} \cup \{\pm(e_i + e_j + c), 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r\} \cup \{\pm(\alpha_i + c), 1 \leqslant i \leqslant t\}$ et $R^+ = \{e_i - e_j, 1 \leqslant i < j \leqslant r\} \cup \{e_i + e_j + c, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r\} \cup \{\alpha_i + c, 1 \leqslant i \leqslant t\}$. Comme $MG^{(i)}$ et MD ne changent pas si on remplace γ_M par $g\gamma_M g^{-1}$ avec $g \in \mathrm{Nor}'_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})(\mathbb{Q})$, on peut supposer que :

- il existe $r' \in \{1, \dots, r\}$ tel que $e_i(\gamma_M) > 0$ pour $i \in \{1, \dots, r'\}$, et $e_i(\gamma_M) < 0$ pour $i \in \{r'+1, \dots, r\}$;
- si $1 \leqslant i < i' \leqslant r'$ ou $r'+1 \leqslant i < i' \leqslant r$, alors $(0 <) e_i(\gamma_M) e_{i'}(\gamma_M)^{-1} < 1$.

Soient $A \subset \{1, \dots, r\}$ et $B \subset \{1, \dots, t\}$; on suppose que $|A|$ est pair. On note $R_{A,B} = j_{M*}(R_{H_{A,B}})$, $R^+_{A,B} = j_{M*}(R^+_{H_{A,B}}) = R^+ \cap R_{A,B}$. Une formule explicite pour $R_{A,B}$ est donnée dans l'exemple 3.2.8. D'après la proposition 3.2.5, on a

$$\Delta^{\mathbf{M}}_{\mathbf{M}', s_{A,B}, \infty}(\gamma'^{-1}, \gamma_M^{-1}) \sum_{\varphi_H \in \Phi_{H_{A,B}}(\varphi)} \varepsilon(\omega_*(\varphi_H)) \Phi^{\mathbf{H}_{A,B}}_{\mathbf{M}'}(\gamma', S\Theta_{\varphi_H}) = \varepsilon_R(\gamma_M)\varepsilon_{R_H}(\gamma')\Phi^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\gamma_M, S\Theta^{A,B}_\varphi),$$

où $S\Theta^{A,B}_\varphi = S\Theta^{H_{A,B}}_\varphi$. D'après le fait 3.1.6 (dont on utilise les notations), $\Phi^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\gamma_M, S\Theta^{A,B}_\varphi)$ est égal à

$$(-1)^{q(\mathbf{G})}\varepsilon_R(\gamma_M)\delta^{1/2}_{\mathbf{P}(\mathbb{R})}(\gamma_M)\Delta_{\mathbf{B}_M}(\gamma_M)^{-1}\sum_{\omega \in \Omega} \varepsilon(\omega) n_{A,B}(\gamma_M, \omega\mathbf{B})(\omega\lambda)(\gamma_M) \prod_{\alpha \in \Phi(\omega)} \alpha^{-1}(\gamma_M),$$

où λ est le plus haut poids de V relativement à $\mathbf{B}$ et $n_{A,B} = n_{H_{A,B}}$.

Calculons R_{γ_M}. On sait (cf l'exemple 3.2.8) que $\alpha_i(\gamma_M) > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$ (et on a supposé que $c(\gamma_M) > 0$). Donc $\{\pm(\alpha_1 + c), \dots, \pm(\alpha_t + c)\} \subset R_{\gamma_M}$. On note $I^+ = \{1, \dots, r'\} = \{i \in \{1, \dots, r\} | e_i(\gamma_M) > 0\}$ et $I^- = \{r'+1, \dots, r\} = \{i \in \{1, \dots, r\} | e_i(\gamma_M) < 0\}$. Alors $R_{\gamma_M} \cap \{\pm(e_i - e_j), 1 \leqslant i < j \leqslant r\} = \{\pm(e_i - e_j) | i < j \text{ et } i, j \in I^+\} \cup \{\pm(e_i - e_j) | i < j \text{ et } i, j \in I^-\}$, et $R_{\gamma_M} \cap \{\pm(e_i + e_j + c), 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r\} = \{\pm(e_i + e_j + c), i, j \in I^+\} \cup \{\pm(e_i + e_j + c), i, j \in I^-\}$.

Si de plus γ_M vérifie les conditions de (ii), alors $0 < \alpha(\gamma_M) < 1$ pour tout $\alpha \in R^+ \cap R_{\gamma_M}$, donc $R^+_{\gamma_M} = R_{\gamma_M} \cap (-R^+)$. Donc, dans ce cas, $\Phi^+ \cap (-R^+_{\gamma_M}) = \Phi^+ \cap R_{\gamma_M}$ est de cardinal $t + |I^+|^2 + |I^-|^2$, et

$$\varepsilon_R(\gamma_M) = (-1)^{t+|I^+|^2+|I^-|^2} = (-1)^{t+|I^+|+|I^-|} = (-1)^{r+t}.$$

On voit de même que, si γ_M vérifie les hypothèses de (ii), alors $\varepsilon_{R_H}(\gamma') = (-1)^{r_1+t_1+t_2}$, où r_1, r_2, t_1, t_2 sont définis comme dans le lemme 2.2.3. Comme $r_2 = |A|$ est pair, on en déduit que $\varepsilon_R(\gamma_M) = \varepsilon_{R_H}(\gamma')$ dans ce cas.

D'autre part, on a $\dim(\mathbf{A}_M/\mathbf{A}_G) = r + t$.

On obtient donc :

$$MG^{(i)} = (-1)^{q(\mathbf{G})}\varepsilon_{R_H}(\gamma')\delta^{1/2}_{\mathbf{P}(\mathbb{R})}(\gamma_M)\Delta_{\mathbf{B}_M}(\gamma_M)^{-1}$$
$$\sum_{\omega \in \Omega} \varepsilon(\omega)(\omega\lambda)(\gamma_M) \prod_{\alpha \in \Phi(\omega)} \alpha^{-1}(\gamma_M) \left(\sum_{A,B} \varepsilon(A)(-1)^{|B \cap C|} n_{A,B}(\gamma_M, \omega\mathbf{B})\right)$$

et

$$MG = m_P 2^{-r-2t}(r!)^{-1}(t!)^{-1}\delta^{1/2}_{\mathbf{P}(\mathbb{R})}(\gamma_M)\Delta_{\mathbf{B}_M}(\gamma_M)^{-1}$$
$$\sum_{\omega \in \Omega} \varepsilon(\omega)(\omega\lambda)(\gamma_M) \prod_{\alpha \in \Phi(\omega)} \alpha^{-1}(\gamma_M) \left(\sum_{A,B} \varepsilon(A) n_{A,B}(\gamma_M, \omega\mathbf{B})\right),$$

où, dans la dernière somme de ces deux expressions, A parcourt l'ensemble des sous-ensembles de cardinal pair de $\{1,\dots,r\}$, et B parcourt l'ensemble des sous-ensembles de $\{1,\dots,t\}$.

On remarque que $R_{A,B}$ ne dépend pas de B, donc

$$\sum_{A,B}\varepsilon(A)(-1)^{|B\cap C|}n_{A,B}(\gamma_M,\omega\mathbf{B})=\left(\sum_B(-1)^{|B\cap C|}\right)\left(\sum_A\varepsilon(A)n_{A,\varnothing}(\gamma_M,\omega\mathbf{B})\right).$$

Si $C\neq\varnothing$, alors $\sum\limits_B(-1)^{|B\cap C|}=0$. Ceci finit la preuve de (i). On s'intéresse maintenant à l'égalité de (ii), donc au cas où $C=\varnothing$. Alors $\sum\limits_B(-1)^{|B\cap C|}=2^t$, c'est-à-dire que

$$\sum_{A,B}\varepsilon(A)n_{A,B}(\gamma_M,\omega\mathbf{B})=2^t\sum_A\varepsilon(A)n_{A,\varnothing}(\gamma_M,\omega\mathbf{B}).$$

On utilise les formules de l'article [H] de Herb pour calculer $\sum\limits_A\varepsilon(A)n_{A,\varnothing}(\gamma_M,\omega\mathbf{B})$. On note $R_{A,\varnothing}=R_A$ et $n_{A,\varnothing}=n_A$. On note $R^+_{A,\gamma_M}=R_A\cap R^+_{\gamma_M}=R_A\cap R_{\gamma_M}\cap(-R^+)$. On note $A_1=\{1,\dots,r\}-A$, $A_2=A$, $A_1^+=A_1\cap I^+$, $A_1^-=A_1\cap I^-$, $A_2^+=A_2\cap I^+$, $A_2^-=A_2\cap I^-$. Alors R_{A,γ_M} est le produit direct du système de racines de type $C_{|A_1^+|}$ sur les racines $e_i+c/2$, $i\in A_1^+$, du système de racines de type $C_{|A_1^-|}$ sur les racines $e_i+c/2$, $i\in A_1^-$, du système de racines de type $D_{|A_2^+|}$ sur les racines $e_i+c/2$, $i\in A_2^+$, du système de racines de type $D_{|A_2^-|}$ sur les racines $e_i+c/2$, $i\in A_2^-$ et des t systèmes de racines de type A_1 sur les racines α_i+c, $1\leqslant i\leqslant t$. Donc -1 est dans le groupe de Weyl de R_{A,γ_M} si et seulement si $|A_2^+|$ et $|A_2^-|$ sont pairs, ce qui revient à demander que $|A_2^-|$ soit pair (car $|A_2|$ est pair) ; on voit facilement que ceci est équivalent au fait que γ' soit dans $Z(\mathbf{H}_{A,B})(\mathbb{R})Im(\mathbf{H}_{A,B,sc}(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbf{H}_{A,B}(\mathbb{R}))$, pour un $B\subset\{1,\dots,t\}$ (ou pour tout $B\subset\{1,\dots,t\}$; cette condition ne dépend pas de B). Si cette condition n'est pas vérifiée, alors $n_A(\gamma_M,\omega\mathbf{B})=0$ pour tout $\omega\in\Omega$. On suppose donc à partir de maintenant que que $|A_2^-|$ est pair.

Pour tous $a,b\in\mathbb{R}$, on note

$$c_1(a)=\begin{cases}1 & \text{si } a>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$c_{2,C}(a,b)=\begin{cases}1 & \text{si } 0<a<b \text{ ou } 0<-b<a\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$c_{2,D}(a,b)=\begin{cases}1 & \text{si } a>|b|\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

et

$$c_2(a,b)=c_{2,C}(a,b)+c_{2,D}(a,b)=\begin{cases}0 & \text{si } a+b\leqslant 0 \text{ ou } a\leqslant 0\\ 1 & \text{si } a>0 \text{ et } b>0\\ 2 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Comme dans la section 7, on note, pour tout ensemble fini I, $\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(I)$ l'ensemble des partitions (non ordonnées) $\{I_z,z\in Z\}$ de I telles que $|I_z|\leqslant 2$ pour tout $z\in Z$ et qu'au plus un des I_z soit de cardinal 1. Si $I=\{1,\dots,r\}$, on note $\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(r)=\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(I)$. Soit $p=\{I_z,z\in Z\}\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(r)$. On choisit une énumération $z_1,\dots,z_k$ de Z, et on note σ l'élément de $\mathfrak{S}_r$ tel que :

- si $1\leqslant i<i'\leqslant k$, alors, pour tous $s\in\sigma(I_{z_i})$ et $s'\in\sigma(I_{z_{i'}})$, on a $s<s'$;
- pour tout $z\in Z$ tel que $|I_z|=2$, si $I_z=\{s_1,s_2\}$ avec $s_1<s_2$, alors $\sigma(s_1)<\sigma(s_2)$.

Alors la signature de σ ne dépend pas de l'énumération de Z choisie, et on la note $\varepsilon(p)$. (Cette définition est la même que celle de la section 7.) Si I est un ensemble fini totalement ordonné et $p\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(I)$, on définit $\varepsilon(p)$ en utilisant l'ordre pour identifier I à $\{1,\dots,|I|\}$. D'autre part, soient $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_r)\in\mathbb{R}^r$ et I un sous-ensemble de $\{1,\dots,r\}$ de cardinal 1 ou 2. Si $|I|=1$

et $I = \{s\}$, on note $c_I(\mu) = c_{I,C}(\mu) = c_1(\mu_s)$; si $|I| = 2$ et $I = \{s_1, s_2\}$ avec $s_1 < s_2$, on note $c_{I,C}(\mu) = c_{2,C}(\mu_{s_1}, \mu_{s_2})$, $c_{I,D}(\mu) = c_{2,D}(\mu_{s_1}, \mu_{s_2})$ et $c_I(\mu) = c_2(\mu_{s_1}, \mu_{s_2})$. Si $\mu \in \mathbb{R}^r$, $I \subset \{1, \dots, r\}$ et $p = \{I_z, z \in Z\} \in \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(Z)$, on pose

$$c_C(p, \mu) = \prod_{z \in Z} c_{I_z,C}(\mu).$$

On définit de même $c_D(p, \mu)$ (si $|I|$ est pair) et $c(p, \mu)$.

On remarque que $\mathbf{A}_M = \mathbb{G}_m^r \times \mathbb{G}_m^t \times \mathbb{G}_m$, et que le sous-groupe $\mathbf{A}_G$ de $\mathbf{A}_M$ est le dernier facteur $\mathbb{G}_m$. Donc $(e_1, \dots, e_r, \alpha_1, \dots, \alpha_t)$ est une base de $X^*(\mathbf{A}_M/\mathbf{A}_G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Soit $\chi \in (X^*(\mathbf{A}_M/\mathbf{A}_G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})_{reg}$. On écrit $\chi = \sum_{i=1}^r \mu_i e_i + \sum_{j=1}^t \nu_j \alpha_j$, avec $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r) \in \mathbb{R}^r$ et $\nu_1, \dots, \nu_t \in \mathbb{R}$. On écrit, comme dans 3.1, $\gamma_M = \exp(x)\gamma_1$, avec $x \in X_*(\mathbf{A}_M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $\gamma_1 \in \mathbf{T}_M(\mathbb{R})_1$. Alors, d'après le théorème 2.12 de [H] (et les hypothèses sur γ_M), le coefficient $\overline{c}_{R_{A,\gamma_M}}(x, \chi)$ est égal au produit de $2^{r+t} c_1(\nu_1) \dots c_1(\nu_t)$ et de

$$\sum_{p_1^+} \sum_{p_1^-} \sum_{p_2^+} \sum_{p_2^-} \varepsilon(p_1^+)\varepsilon(p_2^+)\varepsilon(p_1^-)\varepsilon(p_2^-) c_C(p_1^+, \mu) c_C(p_1^-, \mu) c_D(p_2^+, \mu) c_D(p_2^-, \mu),$$

où p_i^+ parcourt $\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(A_i^+)$ et p_i^- parcourt $\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(A_i^-)$. On en déduit que $\sum_A \varepsilon(A)\overline{c}_{R_{A,\gamma_M}}(x, \chi)$ (où A parcourt l'ensemble des sous-ensembles de cardinal pair de $\{1, \dots, r\}$) est le produit de 2^{r+t} et de

$$c(x, \chi) := c_1(\nu_1) \dots c_1(\nu_t) \sum_{p^+ \in \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(I^+)} \sum_{p^- \in \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(I^-)} \varepsilon(p^+)\varepsilon(p^-) c(p^+, \mu) c(p^-, \mu).$$

On revient au calcul de $\sum_{A,B} \varepsilon(A) n_{A,B}(\gamma_M, \omega\mathbf{B})$. On fixe $\omega \in \Omega$. Par définition (cf 3.1), on a $n_{A,B}(\gamma_M, \omega\mathbf{B}) = \overline{c}_{R_{A,\gamma_M}}(x, p(\omega(\lambda + \rho - \lambda_0)))$, où $\rho = \rho_B$, λ est toujours le plus haut poids de V relativement à $\mathbf{B}$ et λ_0 est comme dans 3.1 le caractère par lequel $\mathbf{A}_G$ agit sur V. D'après les calculs ci-dessus, on a donc

$$\sum_{A,B} \varepsilon(A) n_{A,B}(\gamma_M, \omega(\mathbf{B})) = 2^{r+2t} c(x, p(\omega(\lambda + \rho - \lambda_0))).$$

Finalement :

$$MG = m_P (r!)^{-1} (t!)^{-1} \delta^{1/2}_{\mathbf{P}(\mathbb{R})}(\gamma_M) \Delta_{\mathbf{B}_M}(\gamma_M)^{-1}$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} \varepsilon(\omega) c(x, p(\omega(\lambda + \rho - \lambda_0)))(\omega\lambda)(\gamma_M) \prod_{\alpha \in \Phi(\omega)} \alpha^{-1}(\gamma_M).$$

On calcule maintenant le membre de droite MD de l'égalité de (ii). Pour tout $j \in \{1, \dots, t\}$, soit $u_j \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $\operatorname{Int}(u_j)$ envoie $\mathbf{T}_{j,\mathbb{C}}$ sur le tore diagonal de $\mathbf{GL}_{2,\mathbb{C}}$. Soit $v \in \mathbf{GSp}_{2m}(\mathbb{C})$ tel que $\operatorname{Int}(v)$ envoie $\mathbf{T}_{\mathbb{C}}$ sur le tore diagonal de $\mathbf{GSp}_{2m,\mathbb{C}}$. On note $u = (1, \dots, 1, u_1, \dots, u_t, v) \in \mathbf{M}(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^\times)^r \times \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})^t \times \mathbf{GSp}_{2m}(\mathbb{C})$. Alors $\operatorname{Int}(u)$ envoie $\mathbf{T}_{M,\mathbb{C}}$ sur le tore diagonal $\mathbf{T}_{0,\mathbb{C}}$ de $\mathbf{GSp}_{2n,\mathbb{C}}$, et $\operatorname{Int}(u)(\mathbf{P}) \supset \mathbf{B}$. On utilise la conjugaison par u pour identifier $X^*(\mathbf{T}_0)$ et $X^*(\mathbf{T}_M)$, et on note $\mathbf{B}_M = \mathbf{M}_{\mathbb{C}} \cap \operatorname{Int}(u)^{-1}(\mathbf{B}_{\mathbb{C}})$ (c'est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{M}_{\mathbb{C}}$ contenant $\mathbf{T}_{M,\mathbb{C}}$).

Comme dans la section 7, on note $\mathcal{P}_{ord}(r, t)$ l'ensemble des partitions ordonnées P de $\{1, \dots, r + 2t\}$ telles que, pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, $r + 2i - 1$ et $r + 2i$ soient dans le même ensemble de P. Soit $P = (I_1, \dots, I_k) \in \mathcal{P}_{ord}(r, t)$. On note $|P| = k$ et $s_i = |I_i|$, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. Soit σ_P l'unique permutation de $\mathfrak{S}_{r+2t}$ telle que, pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, σ_P^{-1} soit croissante sur $\{s_1 + \dots + s_i + 1, \dots, s_1 + \dots + s_{i+1}\}$ et envoie $\{s_1 + \dots + s_i + 1, \dots, s_1 + \dots, s_{i+1}\}$ sur I_i. On note $\varepsilon(P)$ la signature de σ_P.

Soit $P=(I_1,\dots,I_k)\in\mathcal{P}_{ord}(r,t)$. On va associer à P un élément $(\mathbf{Q},g)=(\mathbf{Q}_P,g_P)$ de $\mathcal{P}(\mathbf{M})$ (les notations sont celles de 1.2). Pour tout $i\in\{1,\dots,k\}$, on note $s_i=|I_i|$, $r_i=|I_i\cap\{1,\dots,r\}|$ et $t_i=\frac{1}{2}(s_i-r_i)$; on a $t_1,\dots,t_k\in\mathbb{N}$ d'après la définition de $\mathcal{P}_{ord}(r,t)$. On prend $\mathbf{Q}=\mathbf{P}_S$, où $S=\{s_1,s_1+s_2,\dots,s_1+\dots+s_k\}$. Donc $\mathbf{L}_Q=\mathbf{GL}_{s_1}\times\dots\times\mathbf{GL}_{s_k}$ et $\mathbf{G}_Q=\mathbf{GSp}_{2m}$. On note $P_r=(I_1\cap\{1,\dots,r\},\dots,I_k\cap\{1,\dots,r\})$ et $P_t=(J_1,\dots,J_k)$ avec, pour tout $i\in\{1,\dots,k\}$, $J_i=\{l\in\{1,\dots,t\}|r+2l\in I_i\}$. On associe à P_r et P_t des permutations $\sigma_r\in\mathfrak{S}_r$ et $\sigma_t\in\mathfrak{S}_t$ comme on l'a fait pour P (le fait que certains des ensembles composant P_r et P_t peuvent être vides n'a pas d'importance pour cette construction). On choisit g tel que :

- La restriction à $\mathbf{M}_h$ de $\mathrm{Int}(g)$ est l'identité $\mathbf{M}_h\longrightarrow\mathbf{G}_Q$ (comme $\mathbf{M}_Q$ et $\mathbf{M}$ sont standard, on a $\mathbf{M}_h=\mathbf{G}_Q$) ;
- $\mathrm{Int}(g)$ envoie $\mathbf{M}_l$ sur un sous-groupe de Levi standard de $\mathbf{L}_Q$.
- Pour tout $i\in\{0,\dots,k-1\}$, le composé du morphisme $\mathbf{M}_l\longrightarrow\mathbf{L}_Q$ ci-dessus et de la projection de $\mathbf{L}_Q$ sur le facteur $\mathbf{GL}_{s_{i+1}}$ est égal au morphisme qui envoie $(x_1,\dots,x_r,g_1,\dots,g_t)\in\mathbb{G}_m^r\times\mathbf{GL}_2^t$ sur
$$diag(x_{\sigma_r^{-1}(r_1+\dots+r_i+1)},\dots,x_{\sigma_r^{-1}(r_1+\dots+r_{i+1})},g_{\sigma_t^{-1}(t_1+\dots+t_i+1)},\dots,g_{\sigma_t^{-1}(t_1+\dots+t_{i+1})}).$$
- Soit $u_P\in\mathbf{L}_Q(\mathbb{C})$ tel que, pour tout $i\in\{0,\dots,k-1\}$, le projeté de u_P sur le facteur $\mathbf{GL}_{s_{i+1}}(\mathbb{C})$ soit $diag(1,\dots,1,u_{\sigma_t^{-1}(t_1+\dots+t_i+1)},\dots,u_{\sigma_t^{-1}(t_1+\dots+t_{i+1})})$. Si on utilise la conjugaison par u pour identifier $(\mathbf{T}_M\cap\mathbf{M}_l)_{\mathbb{C}}$ à $(\mathbf{T}_0\cap\mathbf{M}_l)=\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^{r+2t}$ et la conjugaison par u_P pour identifier $\mathrm{Int}(g)(\mathbf{T}_M\cap\mathbf{M}_l)_{\mathbb{C}}$ à $(\mathbf{T}_0\cap\mathbf{L}_Q)_{\mathbb{C}}=(\mathbf{T}_0\cap\mathbf{M}_l)_{\mathbb{C}}$, alors $\mathrm{Int}(g)$ est l'application qui envoie $(z_1,\dots,z_{r+2t})$ sur $(z_{\sigma_P^{-1}(1)},\dots,z_{\sigma_P^{-1}(r+2t)})$.

On note $\gamma=\mathrm{Int}(g)(\gamma_M)$. On remarque que, pour tout $i\in\{1,\dots,k\}$, l'intersection de $g\mathbf{B}g^{-1}$ avec le facteur $\mathbf{GL}_{s_i}$ de $\mathbf{L}_Q$ est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. On note $\mathbf{M}_0=g\mathbf{M}g^{-1}=\mathbf{L}_0\times\mathbf{G}_Q$, $\mathbf{T}_{M_0}=\mathrm{Int}(g)(\mathbf{T}_M)$ (le tore maximal de $\mathbf{M}_{0,\mathbb{R}}$ qui contient γ) et $\mathbf{P}_0\subset\mathbf{Q}$ le sous-groupe parabolique standard de sous-groupe de Levi $\mathbf{M}_0$. On utilise la conjugaison par (u_P,v) pour identifier $X^*(\mathbf{T}_{M_0})$ et $X^*(\mathbf{T}_0)$.

On utilise le théorème de Kostant (voir par exemple [GHM] §11) pour calculer $\mathrm{H}^*(Lie(\mathbf{N}_Q),V)_{>0}$. On note Ω le groupe de Weyl de $\mathbf{T}_0(\mathbb{C})$ dans $\mathbf{G}(\mathbb{C})$, Ω_{M_Q} le groupe de Weyl de $\mathbf{T}_0(\mathbb{C})$ dans $\mathbf{M}_Q(\mathbb{C})$ et $\Phi^+=\Phi(\mathbf{T}_0,\mathbf{B})$. Pour tout $\omega\in\Omega$, on note comme avant $\Phi(\omega)=\Phi^+\cap(-\omega\Phi^+)$. Alors $\Omega'_Q:=\{\omega\in\Omega|\Phi(\omega)\subset\Phi(\mathbf{T}_0,Lie(\mathbf{N}_Q))\}$ est un ensemble de représentants de $\Omega_{M_Q}\setminus\Omega$. D'après le théorème de Kostant, on a, pour tout $i\in\mathbb{N}$,
$$\mathbf{H}^i(Lie(\mathbf{N}_Q),V)\simeq\bigoplus_{\omega'\in\Omega'_Q,\ell(\omega')=i}V_{\mathbf{M}_Q,\omega'(\lambda+\rho)-\rho},$$
où $\ell:\Omega\longrightarrow\mathbb{N}$ est la fonction longueur, $\lambda\in X^*(\mathbf{T}_0)$ est le plus haut poids de V relativement à $\mathbf{B}$, $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha$ et, pour tout $\mu\in X^*(\mathbf{T}_0)$ dominant, $V_{\mathbf{M}_Q,\mu}$ est la représentation algébrique de $\mathbf{M}_Q$ de plus haut poids μ relativement à $\mathbf{B}\cap\mathbf{M}_Q$. Pour tout $s\in\{1,\dots,n\}$, on note
$$\varpi_s:\mathbb{G}_m\longrightarrow\mathbf{T}_0,\quad\lambda\longmapsto\begin{pmatrix}\lambda I_s&&0\\&I_{2(n-s)}&\\0&&\lambda^{-1}I_s\end{pmatrix}.$$
Alors, par définition de $\mathrm{H}^i(\dots)_{>0}$ dans 1.2 (et de l'opération de troncature dans [M1] 4.2), on a pour tout $i\in\mathbb{N}$ un isomorphisme
$$\mathbf{H}^i(Lie(\mathbf{N}_Q),V)_{>0}\simeq\bigoplus_{\omega'}V_{\mathbf{M}_Q,\omega'(\lambda+\rho)-\rho},$$
où ω' parcourt l'ensemble des éléments de Ω'_Q vérifiant $\ell(\omega')=i$ et $\langle\omega'(\lambda+\rho)-\rho,\varpi_s\rangle>-ns+\frac{1}{2}s(s-1)$ pour tout $s\in S$. Comme $\omega(\lambda_0)=\lambda_0$ pour tout $\omega\in\Omega$ et $\langle\rho,\varpi_s\rangle=ns-\frac{1}{2}s(s-1)$ et

$\langle\lambda_0,\varpi_s\rangle = 0$ pour tout $s\in\{1,\dots,n\}$, on peut remplacer la deuxième condition par la condition : pour tout $s\in S$, $\langle\omega'(\lambda+\rho+\lambda_0),\varpi_s\rangle > 0$.

D'après la formule du caractère de Weyl (c'est-à-dire la première formule du fait 3.1.6), on a, pour tout $\omega'\in\Omega'_Q$,

$$\mathrm{Tr}(\gamma, V_{\mathbf{M}_Q,\omega'(\lambda+\rho)-\rho}) = \Delta_{\mathbf{B}\cap\mathbf{M}_Q}(\gamma)^{-1}\sum_{\omega_M\in\Omega_{M_Q}}\varepsilon(\omega_M)(\omega_M(\omega'(\lambda+\rho)-\rho))(\gamma)\prod_{\alpha\in\Phi_{M_Q}(\omega_M)}\alpha^{-1}(\gamma),$$

où $\Phi_{M_Q}=\Phi(\mathbf{T}_0,\mathbf{M}_Q)$. Soient $\omega'\in\Omega'_Q$ et $\omega_M\in\Omega_{M_Q}$. Comme ϖ_s est invariant par Ω_M pour tout $s\in S$, on a, pour tout $s\in S$:

$$\langle\omega_M\omega'(\lambda+\rho+\lambda_0),\varpi_s\rangle>0 \Longleftrightarrow \langle\omega'(\lambda+\rho+\lambda_0),\varpi_s\rangle>0.$$

D'autre part, on voit facilement que

$$\omega_M\omega'(\rho)-\omega_M(\rho)-\sum_{\alpha\in\Phi_{M_Q}(\omega_M)}\alpha = -\sum_{\alpha\in\Phi(\omega_M\omega')}\alpha.$$

On note $\Phi^+_{M_Q}=\Phi^+\cap\Phi_{M_Q}$ et $\Phi^+_0=\Phi^+\cap\Phi(\mathbf{T}_0,\mathbf{M}_0)$. On a

$$|D^{M_Q}_{M_0}(\gamma)|^{1/2}=\prod_{\alpha\in\Phi^+_{M_Q}-\Phi^+_0}|\alpha(\gamma)|^{1/2}|1-\alpha^{-1}(\gamma)|,$$

$$\delta^{1/2}_{\mathbf{Q}(\mathbb{R})}(\gamma)=\prod_{\alpha\in\Phi^+-\Phi^+_{M_Q}}|\alpha(\gamma)|^{1/2},$$

$$\delta^{1/2}_{\mathbf{P}_0(\mathbb{R})}(\gamma)=\prod_{\alpha\in\Phi^+-\Phi^+_0}|\alpha(\gamma)|^{1/2},$$

$$\Delta_{\mathbf{B}\cap\mathbf{M}_Q}(\gamma)=\prod_{\alpha\in\Phi^+_{M_Q}}(1-\alpha^{-1}(\gamma))$$

et

$$\Delta_{\mathbf{B}\cap\mathbf{M}_0}(\gamma)=\prod_{\alpha\in\Phi^+_0}(1-\alpha^{-1}(\gamma)).$$

Donc

$$|D^{M_Q}_{M_0}(\gamma)|^{1/2}\delta^{1/2}_{\mathbf{Q}(\mathbb{R})}(\gamma)\Delta_{\mathbf{B}\cap\mathbf{M}_Q}(\gamma)^{-1}=\eta_Q(\gamma)\delta^{1/2}_{\mathbf{P}_0(\mathbb{R})}(\gamma)\Delta_{\mathbf{B}\cap\mathbf{M}_0}(\gamma)^{-1},$$

avec

$$\eta_Q(\gamma)=\prod_{\alpha\in\Phi^+_{M_Q}-\Phi^+_0}\frac{|1-\alpha^{-1}(\gamma)|}{1-\alpha^{-1}(\gamma)}.$$

Comme γ est elliptique dans $\mathbf{M}_0(\mathbb{R})$, les racines de $\Phi^+_{M_Q}-\Phi^+_0$ sont réelles ou complexes quand elles sont vues comme caractères sur $\mathbf{T}_{M_0}(\mathbb{C})$. Si $\alpha\in\Phi^+_{M_Q}-\Phi^+_0$ est complexe, alors il existe $\alpha'\in\Phi^+_{M_Q}-\Phi^+_0$ telle que $\alpha'\neq\alpha$ et $\alpha'(\gamma)=\overline{\alpha(\gamma)}$, et on a

$$\frac{|1-\alpha^{-1}(\gamma)|}{1-\alpha^{-1}(\gamma)}\frac{|1-\alpha'^{-1}(\gamma)|}{1-\alpha'^{-1}(\gamma)}=1.$$

Si $\alpha\in\Phi^+_{M_Q}-\Phi^+_0$ est une racine réelle, alors $|1-\alpha^{-1}(\gamma)|(1-\alpha^{-1}(\gamma))^{-1}$ est égal à 1 si $\alpha(\gamma)<0$ ou $\alpha(\gamma)>1$, et à -1 sinon. Donc, si on note comme avant R^+_γ l'ensemble des racines réelles α de Φ

telles que $\alpha(\gamma)>1$, alors

$$\eta_Q(\gamma)=(-1)^{|\Phi^+_{M_Q}\cap(-R^+_\gamma)|}.$$

On en déduit que $|D^{M_Q}_{M_0}(\gamma)|^{1/2}\delta^{1/2}_{\mathbf{Q}(\mathbb{R})}(\gamma)Tr(\gamma,Lie(\mathbf{N}_Q,V)_{>0})$ est égal à

$$\eta_Q(\gamma)\delta^{1/2}_{\mathbf{P}_0(\mathbb{R})}(\gamma)\Delta_{\mathbf{B}\cap\mathbf{M}_0}(\gamma)^{-1}\sum_\omega\varepsilon(\omega)(\omega\lambda)(\gamma)\prod_{\alpha\in\Phi(\omega)}\alpha^{-1}(\gamma),$$

où ω parcourt l'ensemble des éléments de Ω tels que $\langle\omega(\lambda+\rho+\lambda_0),\varpi_s\rangle>0$ pour tout $s\in S$.

On plonge $\mathfrak{S}_{r+2t}$ dans $\mathfrak{S}_n$ en faisant agir $\mathfrak{S}_{r+2t}$ de manière habituelle sur $\{1,\dots,r+2t\}$, et trivialement sur $\{r+2t+1,\dots,n\}$. Comme $\Omega\simeq\{\pm1\}^n\rtimes\mathfrak{S}_n$, on en déduit un plongement de $\mathfrak{S}_{r+2t}$ dans Ω, qu'on utilise pour identifier $\mathfrak{S}_{r+2t}$ à un sous-groupe de Ω. On remarque que, pour tout $\omega\in\Omega$, $\varepsilon(\omega)=\varepsilon(P)\varepsilon(\sigma_P^{-1}\omega)$ et $(\omega\lambda)(\gamma)=(\sigma_P^{-1}\omega\lambda)(\gamma_M)$. Soit $\mu\in X^*(\mathbf{T}_0)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. On lui associe l'élément $y_\mu=(y_1,\dots,y_{r+2t})$ de $\mathbb{R}^{r+2t}$ défini de la manière suivante : $y_1=\langle\mu,\varpi_1\rangle$ et, pour tout $i\in\{2,\dots,r+2t\}$, $y_i=\langle\mu,\varpi_i\rangle-\langle\mu,\varpi_{i-1}\rangle$. On écrit $\mu>_P 0$ si, pour tout $i\in\{1,\dots,k\}$, $\sum\limits_{j\in I_1\cup\dots\cup I_i}y_j>0$ (c'est-à-dire si et seulement si, avec les notations de la section 7, $y_{\mu,P}>0$). Alors il est facile de voir que, pour tout $\omega\in\Omega$, on a $\langle\omega(\lambda+\rho+\lambda_0),\varpi_s\rangle>0$ pour tout $s\in S$ si et seulement si $\sigma_P^{-1}\omega(\lambda+\rho+\lambda_0)>_P 0$. Calculons $\eta_Q(\gamma)$. On a $\eta_Q(\gamma)=(-1)^{|\Phi^+_{M_Q}\cap(-R^+_\gamma)|}$, et $\Phi^+_{M_Q}\cap(-R^+_\gamma)$ est l'ensemble des racines $\alpha\in\Phi^+_{M_Q}$ qui sont réelles sur $\mathrm{Int}(g_P)(\mathbf{T}_M)$ et telles que $0<\alpha(\gamma)<1$. L'ensemble $\mathrm{Int}(g_P)^{-1}(\Phi^+_{M_Q}\cap(-R^+_\gamma))$ est inclus dans l'ensemble des racines de la forme $e_i-e_{i'}$, avec $i<i'$ et i,i' dans le même ensemble de P ; en fait, c'est le sous-ensemble des racines α de cette forme et vérifiant $0<\alpha(\gamma_M)<1$. D'après les hypothèses sur γ_M, on a donc

$$|\Phi^+_{M_Q}\cap(-R^+_\gamma)|=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k(|I_i^+|(|I_i^+|-1)+|I_i^-|(|I_i^-|-1)),$$

où, pour tout $i\in\{1,\dots,k\}$, $I_i^+=I_i\cap I^+$ et $I_i^-=I_i\cap I^-$. Donc le signe $\eta_Q(\gamma)$ ne dépend que de P. On note $P^+=(I_1^+,\dots,I_k^+)$, $P^-=(I_1^-,\dots,I_k^-)$ et $\varepsilon'(P^\pm)=(-1)^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k|I_i^\pm|(|I_i^\pm|-1)}$. Alors

$$\eta_Q(\gamma)=\varepsilon'(P^+)\varepsilon'(P^-).$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\delta^{1/2}_{\mathbf{P}_0(\mathbb{R})}(\gamma)\prod_{\alpha\in\Phi(\omega)}\alpha^{-1}(\gamma)&=\prod_{\alpha\in\Phi^+}|\alpha(\gamma)|^{1/2}\prod_{\alpha\in\Phi_0^+}|\alpha(\gamma)|^{-1/2}\prod_{\alpha\in\Phi^+\cap(-\omega\Phi^+)}\alpha^{-1}(\gamma)\\&=\prod_{\alpha\in\sigma_P^{-1}\Phi^+}|\alpha(\gamma_M)|^{1/2}\prod_{\alpha\in\Phi_0^+}|\alpha(\gamma)|^{-1/2}\prod_{\alpha\in\sigma_P^{-1}\Phi^+\cap(-\sigma_P^{-1}\omega\Phi^+)}\alpha^{-1}(\gamma_M)\end{aligned}$$

et

$$\delta^{1/2}_{\mathbf{P}(\mathbb{R})}(\gamma_M)\prod_{\alpha\in\Phi(\sigma_P^{-1}\omega)}\alpha^{-1}(\gamma_M)=\prod_{\alpha\in\Phi^+}|\alpha(\gamma_M)|^{1/2}\prod_{\alpha\in\Phi_M^+}|\alpha(\gamma_M)|^{-1/2}\prod_{\alpha\in\Phi^+\cap(-\sigma_P^{-1}\omega\Phi^+)}\alpha^{-1}(\gamma_M),$$

où $\Phi_M^+=\Phi(\mathbf{T}_M,\mathbf{B}_M)$. Il est facile de voir que $\prod\limits_{\alpha\in\Phi_0^+}\alpha(\gamma)=\prod\limits_{\alpha\in\Phi_M^+}\alpha(\gamma_M)$. Donc

$$\delta^{1/2}_{\mathbf{P}_0(\mathbb{R})}(\gamma)\prod_{\alpha\in\Phi(\omega)}\alpha^{-1}(\gamma)\delta^{-1/2}_{\mathbf{P}(\mathbb{R})}(\gamma_M)\prod_{\alpha\in\Phi(\sigma_P^{-1}\omega)}\alpha(\gamma_M)=\prod_{\alpha\in\Phi^+\cap(-\sigma_P^{-1}\Phi^+)}|\alpha(\gamma_M)|\alpha^{-1}(\gamma_M).$$

On rappelle qu'on a défini un élément $u\in\mathbf{G}(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{Int}(u)$ envoie $\mathbf{T}_{M,\mathbb{C}}$ sur le tore diagonal $\mathbf{T}_{0,\mathbb{C}}$. Pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, on note $e_i:\mathbf{T}_{M,\mathbb{C}}\longrightarrow\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ le composé de $\mathrm{Int}(u)$ et du morphisme $\mathbf{T}_{0,\mathbb{C}}\longrightarrow\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}},diag(x_1,\dots,x_{2n})\longmapsto x_i$ (ceci est cohérent avec la définition de $e_1,\dots,e_r$ plus haut). Alors l'ensemble $\Phi^+ \cap (-\sigma_P^{-1}\Phi^+) = \Phi(\sigma_P^{-1})$ est inclus dans l'ensemble des $e_i - e_j$ avec $1 \leqslant i < j \leqslant r+2t$ et $j \neq i+1 \mod 2$ si $i \in \{r+1,\dots,r+2t\}$ (ceci résulte directement du fait que $P \in \mathcal{P}_{ord}(r,t)$). Donc les racines de $\Phi(\sigma_P^{-1})$ sont réelles ou complexes (mais pas imaginaires) sur $\mathbf{T}_M(\mathbb{R})$. De plus, comme σ_P, vu comme élément du groupe de Weyl de $\mathbf{T}_M(\mathbb{C})$ dans $\mathbf{G}(\mathbb{C})$, est dans le groupe de Weyl de $\mathbf{T}_M(\mathbb{R})$ dans $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ (et même dans $(\mathrm{Nor}_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_M)/\mathbf{T}_M)(\mathbb{Q})$), si $\alpha \in \Phi(\sigma_P^{-1})$ est complexe, alors sa racine conjuguée est aussi dans $\Phi(\sigma_P^{-1})$. On en déduit que

$$\prod_{\alpha\in\Phi(\sigma_P^{-1})} |\alpha(\gamma_M)|\alpha^{-1}(\gamma_M) = (-1)^{|\{\alpha\in\Phi(\sigma_P^{-1})|\alpha(\gamma_M)\in\mathbb{R} \text{ et } \alpha(\gamma_M)<0\}|}.$$

Si $\alpha = e_i - e_j$ avec $1 \leqslant i < j \leqslant r+2t$, on a $\alpha(\gamma_M) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $j \leqslant r$, et, si cette condition est vérifiée, on a $\alpha(\gamma_M) < 0$ si et seulement si $i \in I^+$ et $j \in I^-$. Donc le signe ci-dessus ne dépend que de P ; on le note $\varepsilon''(P)$. On a

$$\varepsilon''(P) = (-1)^{|\{(i,j)\in I^+\times I^-|i<j \text{ et } \sigma_P^{-1}(i)>\sigma_P^{-1}(j)\}|}.$$

Enfin, on remarque que, comme $P \in \mathcal{P}_{ord}(r,t)$, on a $\varepsilon(P) = \varepsilon(P_r)$. En utilisant les ordres sur I^+ et I^- hérités de l'ordre sur $\{1,\dots,r\}$, on peut définir des signes $\varepsilon(P^+)$ et $\varepsilon(P^-)$, et on voit facilement que

$$\varepsilon(P_r)\varepsilon''(P) = \varepsilon(P^+)\varepsilon(P^-).$$

Les calculs ci-dessus montrent que $|D_{M_0}^{M_Q}(\gamma)|^{1/2}\delta_{\mathbf{Q}(\mathbb{R})}^{1/2}(\gamma)Tr(\gamma, Lie(\mathbf{N}_Q, V)_{>0})$ est égal à

$$\delta_{\mathbf{P}(\mathbb{R})}^{1/2}(\gamma_M)\Delta_{\mathbf{B}_M}(\gamma_M)^{-1}\sum_{\omega\in\Omega}\varepsilon(\omega)(\omega\lambda)(\gamma_M)\prod_{\alpha\in\Phi(\omega)}\alpha^{-1}(\gamma_M)$$
$$(-1)^{|P|}\varepsilon(P^+)\varepsilon(P^-)\varepsilon'(P^+)\varepsilon'(P^-)\mathbb{1}_{\omega(\lambda+\rho+\lambda_0)>_P 0}.$$

D'autre part, on a par définition (cf 1.2) $m_Q = 1$ si $m > 0$, et $m_Q = 2$ si $m = 0$; donc $m_Q = m_P$. De plus,

$$\dim(\mathbf{A}_{M_0}/\mathbf{A}_{M_Q}) = r+t-k = r+t-|S|$$
$$n_{M_0}^{M_Q} = r_1!t_1!\dots r_k!t_k!$$
$$|(\mathrm{Nor}'_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})/(\mathrm{Nor}'_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})\cap g^{-1}\mathbf{M}_Q g))(\mathbb{Q})| = r!t!(r_1!t_1!\dots r_k!t_k!)^{-1}.$$

Donc

$$|(\mathrm{Nor}'_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})/(\mathrm{Nor}'_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})\cap g^{-1}\mathbf{M}_Q g))(\mathbb{Q})|^{-1}m_Q(-1)^{\dim(\mathbf{A}_{M_0}/\mathbf{A}_{M_Q})}(n_{M_0}^{M_Q})^{-1} =$$
$$m_P(-1)^{r+t}(r!t!)^{-1}(-1)^{|S|},$$

et seul le facteur $(-1)^{|S|}$ dépend de $\mathbf{Q}$. Donc le terme de MD associé à $(\mathbf{Q}, g)$ est égal à

$$m_P(-1)^{r+t}(r!t!)^{-1}\delta_{\mathbf{P}(\mathbb{R})}^{1/2}(\gamma_M)\Delta_{\mathbf{B}_M}(\gamma_M)^{-1}\sum_{\omega\in\Omega}\varepsilon(\omega)(\omega\lambda)(\gamma_M)\prod_{\alpha\in\Phi(\omega)}\alpha^{-1}(\gamma_M)$$
$$(-1)^{|P|}\varepsilon(P^+)\varepsilon(P^-)\varepsilon'(P^+)\varepsilon'(P^-)\mathbb{1}_{\omega(\lambda+\rho+\lambda_0)>_P 0}.$$

De plus, lorsque P parcourt $\mathcal{P}_{ord}(r,t)$, $(\mathbf{Q}_P, g_P)$ parcourt un ensemble de représentants de $\mathcal{P}(\mathbf{M})/\sim$. Finalement, MD est égal à

$$m_P(-1)^{r+t}(r!t!)^{-1}\delta_{\mathbf{P}(\mathbb{R})}^{1/2}(\gamma_M)\Delta_{\mathbf{B}_M}(\gamma_M)^{-1}\sum_{\omega\in\Omega}\varepsilon(\omega)(\omega\lambda)(\gamma_M)\prod_{\alpha\in\Phi(\omega)}\alpha^{-1}(\gamma_M)$$

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_{ord}(r,t)}(-1)^{|P|}\varepsilon(P^+)\varepsilon(P^-)\varepsilon'(P^+)\varepsilon'(P^-)\mathbb{1}_{\omega(\lambda+\rho+\lambda_0)>_P 0}.$$

En comparant cette formule avec la formule obtenue plus haut pour MG, on voit que, pour conclure, il suffit de montrer que, pour tout $\mu\in X^*(\mathbf{T}_0)_{\mathbb{R}}$,

$$c(x,p(\mu))=(-1)^{r+t}\sum_{P\in\mathcal{P}_{ord}(r,t)}(-1)^{|P|}\varepsilon(P^+)\varepsilon(P^-)\varepsilon'(P^+)\varepsilon'(P^-)\mathbb{1}_{\mu>_P 0}.$$

Mais ceci résulte directement du corollaire 7.5, appliqué à y_μ (on remarque que, si $y_\mu=(y_1,\dots,y_{r+2t})$ et $p(\mu)=\sum_{i=1}^r\mu_ie_i+\sum_{j=1}^t\nu_j\alpha_j$, alors $y_i=\mu_i$ pour tout $i\in\{1,\dots,r\}$ et $y_{r+2j-1}+y_{r+2j}=\nu_j$ pour tout $j\in\{1,\dots,t\}$).

□

4. Intégrales orbitales en p

Soit p un nombre premier. Si $\mathbf{G}$ est un groupe de la forme $\mathbf{GL}_{n_1}\times\dots\times\mathbf{GL}_{n_r}\times\mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2m_1}\times\mathbf{SO}_{2m_2})$, on note, pour toute extension L de $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{H}_{\mathbf{G}(L)}$ l'algèbre de Hecke des fonctions $\mathbf{G}(L)\longrightarrow\mathbb{C}$ à support compact et bi-invariantes par $\mathbf{G}(\mathcal{O}_L)$ (munie du produit de convolution). Cette algèbre est commutative.

Soit $a\in\mathbb{N}^*$. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$ et on note L l'extension non ramifiée de degré a de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Soit $\sigma\in\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$ le relèvement du Frobenius arithmétique. On fixe $n\in\mathbb{N}$, et on note $\mathbf{G}=\mathbf{GSp}_{2n}$. Soient $\mathbf{M}$ un sous-groupe de Levi cuspidal standard de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{P}$ le sous-groupe parabolique standard de $\mathbf{G}$ de sous-groupe de Levi $\mathbf{M}$. On écrit $\mathbf{M}=\mathbf{M}_l\times\mathbf{M}_h\simeq\mathbb{G}_m^r\times\mathbf{GL}_2^t\times\mathbf{GSp}_{2m}$ et on note $\Omega^{\mathbf{M}}$ le groupe d'automorphismes de $\mathbf{M}$ défini à la fin de 3.2.

Soient $(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0})\in\mathcal{E}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$, $(\mathbf{H},s,\eta_0)$ son image dans $\mathcal{E}(\mathbf{G})$ et $\mathbf{M}_H$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{H}$ associé à $\mathbf{M}'$. On peut supposer que $s=s_M=s_{A,B,m_1,m_2}$ (avec les notations du lemme 2.2.3), où $A\subset\{1,\dots,r\}$, $B\subset\{1,\dots,t\}$ et $m_1+m_2=m$. On suppose que m_2 et $|A|$ sont pairs (c'est-à-dire que $\mathbf{H}$ et $\mathbf{M}'$ sont cuspidaux). On fait agir $\Omega^{\mathbf{M}}$ sur $\mathbf{M}_H\simeq\mathbb{G}_m^r\times\mathbf{GL}_2^t\times\mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2m_1}\times\mathbf{SO}_{2m_2})$ par les mêmes formules que celles qui définissent son action sur $\mathbf{M}$. On note $\varepsilon_{s_M}:\Omega^{\mathbf{M}}\longrightarrow\{\pm1\}$ le morphisme qui était noté ε_κ dans 3.2.

On note $s'_M=s_{\varnothing,\varnothing,m_1,m_2}\in Z(\widehat{\mathbf{M}'})$ (donc les composantes dans $\widehat{\mathbf{M}}_h$ de s_M et s'_M sont les mêmes, et la composante dans $\widehat{\mathbf{M}}_l$ de s'_M est triviale). Alors $(\mathbf{M}',s'_M,\eta_{M,0})$ est un triplet endoscopique elliptique de $\mathbf{M}$, qui est équivalent à $(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0})$ en tant que $\mathbf{M}$-triplet endoscopique.

Dans [K7] p 179-180, Kottwitz a expliqué comment associer à la donnée endoscopique $(\mathbf{H},s,\eta_0)$ de $\mathbf{G}$ et à L un morphisme de "transfert tordu" $b:\mathcal{H}_{\mathbf{G}(L)}\longrightarrow\mathcal{H}_{\mathbf{H}(\mathbb{Q}_p)}$ (attention, ce morphisme dépend de s, et pas seulement de son image dans $Z(\widehat{\mathbf{G}})/Z(\widehat{\mathbf{H}})$). Cette construction est rappelée dans la section 9.1 de [M2]. On notera $b_M:\mathcal{H}_{\mathbf{M}(L)}\longrightarrow\mathcal{H}_{\mathbf{M}'(\mathbb{Q}_p)}$ le morphisme de transfert tordu obtenu en utilisant le triplet endoscopique $(\mathbf{M}',s'_M,\eta_{M,0})$ de $\mathbf{M}$.

Soit $\mu:\mathbb{G}_m\longrightarrow\mathbf{G}$, $\lambda\longmapsto\begin{pmatrix}\lambda I_n & 0\\ 0 & I_n\end{pmatrix}$. Le cocaractère μ se factorise par $\mathbf{M}$, et on note encore μ le cocaractère de $\mathbf{M}$ déduit de μ. Soit ϖ_L une uniformisante de L. On pose

$$\phi=\mathbb{1}_{\mathbf{G}(\mathcal{O}_L)\mu(\varpi_L^{-1})\mathbf{G}(\mathcal{O}_L)}\in\mathcal{H}_{\mathbf{G}(L)}$$

$$\phi^{\mathbf{M}}=\mathbb{1}_{\mathbf{M}(\mathcal{O}_L)\mu(\varpi_L^{-1})\mathbf{M}(\mathcal{O}_L)}\in\mathcal{H}_{\mathbf{M}(L)}.$$

On note $f^{\mathbf{H}}=b(\phi)\in\mathcal{H}_{\mathbf{H}(\mathbb{Q}_p)}$, $f^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}_H}\in\mathcal{H}_{\mathbf{M}_H(\mathbb{Q}_p)}$ le terme constant de $f^{\mathbf{H}}$ en $\mathbf{M}_H$, $\phi_{\mathbf{M}}\in\mathcal{H}_{\mathbf{M}(L)}$ le terme constant de ϕ en $\mathbf{M}$, $\psi^{\mathbf{M}'} = b_M(\phi_{\mathbf{M}}) \in \mathcal{H}_{\mathbf{M}'(\mathbb{Q}_p)} = \mathcal{H}_{\mathbf{M}_H(\mathbb{Q}_p)}$ et $f^{\mathbf{M}'} = b_M(\phi^{\mathbf{M}}) \in \mathcal{H}_{\mathbf{M}'(\mathbb{Q}_p)} = \mathcal{H}_{\mathbf{M}_H(\mathbb{Q}_p)}$.

Enfin, on écrit $\mathbf{M}' = \mathbf{M}_H = \mathbf{M}_{H,l} \times \mathbf{M}_{H,h}$, avec $\mathbf{M}_{H,l} = \mathbf{M}_l$ et $\mathbf{M}_{H,h} \simeq \mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2m_1} \times \mathbf{SO}_{2m_2})$. Pour tout $\gamma_H = (\lambda_1, \dots, \lambda_r, h_1, \dots, h_t, g) \in \mathbf{M}_H(\mathbb{Q}_p) = (\mathbb{Q}_p^\times)^r \times \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)^t \times \mathbf{M}_{H,h}(\mathbb{Q}_p)$ d'image γ dans $\mathbf{M}(\mathbb{Q}_p)$ (un tel γ existe toujours, car $\mathbf{M}$ est déployé), on note

$$I(\gamma_H) = I(\gamma) = \{i \in \{1, \dots, r\}, |\lambda_i|_p = p^{-a}\}.$$

Proposition 4.1. *Soit $\gamma_H \in \mathbf{M}_H(\mathbb{Q}_p)$. Soit γ une image de γ_H dans $\mathbf{M}(\mathbb{Q}_p)$. Si $O_{\gamma_H}(f^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}_H}) \neq 0$, alors $|c(\gamma_H)|_p = |c(\gamma)|_p = p^a$. De plus :*

(i) Si $\gamma \in \mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)\mathbf{M}_h(\mathbb{Q}_p)$, alors

$$O_{\gamma_H}(f^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}_H}) = \delta^{1/2}_{\mathbf{P}(\mathbb{Q}_p)}(\gamma) O_{\gamma_H}(f^{\mathbf{M}'}).$$

(ii) Il existe $C \subset \{1, \dots, t\}$, indépendant du choix de A et B (mais dépendant de γ_H), tel que

$$O_{\gamma_H}(f^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}_H}) = (-1)^{|I(\gamma_H) \cap A|} \varepsilon_C(s_M) O_{\gamma_H}(\psi^{\mathbf{M}'}),$$

où $\varepsilon_C(s_M) = (-1)^{|C \cap B|}$. De plus, C est non vide si et seulement si $\Omega^{\mathbf{M}}(\gamma) \cap \mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)\mathbf{M}_h(\mathbb{Q}_p) = \varnothing$.

(iii) Pour tout $\omega \in \Omega^{\mathbf{M}}$,

$$O_{\omega(\gamma_H)}(f^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}_H}) = \varepsilon_{s_M}(\omega) O_{\gamma_H}(f^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}_H}).$$

Pour tout $\delta \in \mathbf{M}(L)$ σ-semi-simple, on définit $\alpha_p(\gamma, \delta)$ comme l'article [K7] de Kottwitz (§7, p 180). En appliquant le lemme fondamental tordu dont l'énoncé est rappelé dans la section 5.3 de [M2] (et en utilisant le fait que, avec la normalisation de 5.1, les facteurs de transfert sont les mêmes pour s_M et s'_M), on obtient donc le corollaire suivant :

Corollaire 4.2. *(i) Si $\gamma \in \mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)\mathbf{M}_h(\mathbb{Q}_p)$, alors*

$$SO_{\gamma_H}(f^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}_H}) = \delta^{1/2}_{\mathbf{P}(\mathbb{Q}_p)}(\gamma) \sum_{\delta} < \alpha_p(\gamma,\delta), s'_M > \Delta^{\mathbf{M}}_{\mathbf{M}_H, s_M, p}(\gamma_H, \gamma) e(\delta) TO_\delta(\phi^{\mathbf{M}}).$$

(ii) Il existe $C \subset \{1, \dots, t\}$, indépendant du choix de A et B (mais dépendant de γ_H), tel que

$$SO_{\gamma_H}(f^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}_H}) = \varepsilon_C(s_M)(-1)^{|I(\gamma_H) \cap A|} \sum_{\delta} < \alpha_p(\gamma, \delta), s'_M > \Delta^{\mathbf{M}}_{\mathbf{M}_H, s_M, p}(\gamma_H, \gamma) e(\delta) TO_\delta(\phi_{\mathbf{M}}).$$

De plus, C est non vide si et seulement si $\Omega^{\mathbf{M}}(\gamma) \cap \mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)\mathbf{M}_h(\mathbb{Q}_p) = \varnothing$.

Dans les deux sommes ci-dessus, les facteurs de transfert sont normalisés comme dans 5.1, δ parcourt l'ensemble des classes de σ-conjugaison de $\mathbf{M}(L)$ telles que γ soit conjugué dans $\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ à $N\delta := \delta\sigma(\delta) \dots \sigma^{a-1}(\delta)$, et $e(\delta) = e(\mathbf{G}^\sigma_\delta)$, où $\mathbf{G}^\sigma_\delta$ est le σ-centralisateur de δ dans $\mathbf{G}$ (cf [K7] p 181, ou 1.2) et e est le signe de [K1].

Démonstration de la proposition. Soient $\mathbf{T}$ le tore diagonal de $\mathbf{G}$, $\mathbf{B}$ le sous-groupe de Borel standard de $\mathbf{G}$, $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi(\mathbf{T}, \mathbf{B})} \alpha$ et $\rho_M = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi(\mathbf{T}, \mathbf{B} \cap \mathbf{M})} \alpha$. Alors

$$< \rho, \mu >= \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$< \rho_M, \mu >= \frac{1}{2} m(m+1).$$

On identifie $\mathbb{C}[X_*(\mathbf{T})]$ à $\mathbb{C}[X^{\pm 1}, X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ de la manière suivante ; on envoie X sur le cocaractère μ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on envoie X_i sur le cocaractère $\lambda \longmapsto diag(a_1(\lambda), \dots, a_{2n}(\lambda))$, où

$$a_j(\lambda)=\begin{cases}\lambda & \text{si } j=i\\ \lambda^{-1} & \text{si } j=2n+1-i\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Soit Ω le groupe de Weyl de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{G}$ (absolu ou relatif, cela ne change rien dans ce cas). On a $\Omega\simeq\{\pm1\}^n\rtimes\mathfrak{S}_n$, et ce groupe agit sur $\mathbb{C}[X^{\pm1},X_1^{\pm1},\dots,X_n^{\pm1}]$ de la manière suivante :

- Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. Alors $\sigma(X)=X$ et, pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, $\sigma(X_i)=X_{\sigma^{-1}(i)}$.
- Soit $e=(e_1,\dots,e_n)\in\{\pm1\}^n$. On note $I=\{i\in\{1,\dots,n\}|e_i=-1\}$. Alors $e(X)=X\prod\limits_{i\in I}X_i^{-1}$ et, pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, $e(X_i)=X_i^{e_i}$.

D'après le théorème 2.1.3 de [K2] (et la reformulation de ce théorème sous la formule (2.3.4) de cet article), la transformée de Satake de ϕ est

$$p^{an(n+1)/2}X^{-1}\sum_{I\subset\{1,\dots,n\}}\prod_{i\in I}X_i.$$

On identifie $\mathbf{T}$ aux tores diagonaux de $\mathbf{M}$, $\mathbf{H}$ et $\mathbf{M}_H$. On peut choisir ces identifications (simplement en respectant l'ordre naturel sur les coordonnées de $\mathbf{T}$) de manière à ce que :

- La transformée de Satake de $\phi_{\mathbf{M}}$ soit égale à celle de ϕ.
- La transformée de Satake de $\phi^{\mathbf{M}}$ soit égale à
$$p^{am(m+1)/2}X^{-1}\sum_{I\subset\{r+2t+1,\dots,n\}}\prod_{i\in I}X_i.$$
- La transformée de Satake de $f^{\mathbf{M}'}$ soit égale à
$$p^{am(m+1)/2}X^{-a}\sum_{I\subset\{r+2t+1,\dots,n\}}(-1)^{|I\cap K'|}\prod_{i\in I}X_i^a,$$
où $K'=\{r+2t+m_1+1,\dots,n\}$.
- Les transformées de Satake de $f^{\mathbf{H}}$ et $f^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}_H}$ soient toutes les deux égales à
$$p^{an(n+1)/2}X^{-a}\sum_{I\subset\{1,\dots,n\}}(-1)^{|I\cap K|}\prod_{i\in I}X_i^a,$$
où $K=A\cup\{r+2j-1,r+2j,j\in B\}\cup K'$.
- La transformée de Satake de $\psi^{\mathbf{M}'}$ soit égale à
$$p^{an(n+1)/2}X^{-a}\sum_{I\subset\{1,\dots,n\}}(-1)^{|I\cap K'|}\prod_{i\in I}X_i.$$

Pour tout $I\subset\{1,\dots,r\}$, on note ψ_I la fonction de transformée de Satake $\prod\limits_{i\in I}X_i^a$ sur le facteur $(\mathbb{G}_m^r)(\mathbb{Q}_p)$ de $\mathbf{M}_{H,l}(\mathbb{Q}_p)$. Pour tout $j\in\{1,\dots,t\}$, on note $\psi_j^{(0)}$ (resp. $\psi_j^{(1)}$, resp. $\psi_j^{(2)}$) la fonction de transformée de Satake 1 (resp. $X^a_{r+2j-1}+X^a_{r+2j}$, resp. $X^a_{r+2j-1}X^a_{r+2j}$) sur le j-ième facteur $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de $\mathbf{M}_{H,l}(\mathbb{Q}_p)$. Enfin, on note ψ_h la fonction de transformée de Satake $X^{-a}\sum\limits_{I\subset\{r+2t+1,\dots,n\}}(-1)^{|I\cap K'|}\prod\limits_{i\in I}X_i^a$ sur $\mathbf{M}_{H,h}(\mathbb{Q}_p)$. Alors, d'après les calculs ci-dessus :

$$f^{\mathbf{M}'}=p^{am(m+1)/2}\psi_\varnothing\psi_1^{(0)}\dots\psi_t^{(0)}\psi_h$$

$$\psi^{\mathbf{M}'}=p^{an(n+1)/2}\left(\sum_{I\subset\{1,\dots,r\}}\psi_I\right)\left(\prod_{j=1}^t(\psi_j^{(0)}+\psi_j^{(1)}+\psi_j^{(2)}\right)\psi_h$$

$$f^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}_H}=p^{an(n+1)/2}\left(\sum_{I\subset\{1,\dots,r\}}(-1)^{|I\cap A|}\psi_I\right)\left(\prod_{j=1}^{t}(\psi_j^{(0)}-\psi_j^{(1)}+\psi_j^{(2)})\right)\psi_h.$$

Soient γ_H et γ comme dans l'énoncé de la proposition. Il est clair que $O_{\gamma_H}(f^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}_H})\neq 0$ seulement si $|c(\gamma_H)|_p=p^a$, et que $c(\gamma)=c(\gamma_H)$. Dans la suite de la preuve, on suppose que $O_{\gamma_H}(f^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}_H})\neq 0$ (sinon, toutes les égalités à prouver sont triviale).

Montrons (i). On suppose que $\gamma\in\mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)\mathbf{M}_h(\mathbb{Q}_p)$. Alors $\gamma_H\in\mathbf{M}_{H,l}(\mathbb{Z}_p)\mathbf{M}_{H,h}(\mathbb{Q}_p)$. Soient $I\subset\{1,\dots,r\}$ et $a_1,\dots,a_t\in\{0,1,2\}$. Alors

$$O_{\gamma_H}(\psi_I(\prod_{j=1}^{t}\psi_j^{(a_j)})\psi_h)=0$$

sauf si $I=\varnothing$ et $a_1=\dots=a_t=0$. Donc

$$O_{\gamma_H}(f^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}_H})=p^{an(n+1)/2}O_{\gamma_H}(\psi_\varnothing\psi_1^{(0)}\dots\psi_t^{(0)}\psi_h).$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que, comme $\gamma\in\mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)\mathbf{M}_h(\mathbb{Q}_p)$, on a $\delta^{1/2}_{\mathbf{P}(\mathbb{Q}_p)}=|c(\gamma)|_p^{(n(n+1)-m(m+1))/2}=p^{an(n+1)/2}p^{-am(m+1)/2}$.

Montrons (ii). On sait que :

- les supports des fonctions des fonctions ψ_I, $I\subset\{1,\dots,r\}$, dont deux à deux disjoints ;
- pour tout $j\in\{1,\dots,t\}$, les supports des fonctions $h\longmapsto O_h(\psi_j^{(0)})$, $h\longmapsto O_h(\psi_j^{(1)})$ et $h\longmapsto O_h(\psi_j^{(2)})$ sont deux à deux disjoints (cela résulte par exemple du fait qu'un $h\in\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui est dans le support de $h'\longmapsto O_{h'}(\psi_j^{(k)})$ vérifie $|\det(h)|_p=p^{-ak}$).

On en déduit qu'il existe un unique $I\subset\{1,\dots,r\}$ et d'uniques $a_1,\dots,a_t\in\{0,1,2\}$ tels que $O_{\gamma_H}(\psi_I\psi_1^{(a_1)}\dots\psi_t^{(a_t)}\psi_h)\neq 0$. On note $C=\{j\in\{1,\dots,t\}|a_t=1\}$. Il est clair que $I(\gamma_H)=I$. L'égalité de (ii) résulte des formules ci-dessus pour $f^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}_H}$ et $\psi^{\mathbf{M}_H}$. Enfin, il est clair d'après la définition de l'action de $\Omega^{\mathbf{M}}$ que $C\neq\varnothing$ si et seulement si $\Omega^{\mathbf{M}}(\gamma)\cap\mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)\mathbf{M}_h(\mathbb{Q}_p)=\varnothing$.

Montrons (iii). Il est clair d'après la définition de $\psi^{\mathbf{M}'}$ que $O_{\omega(\gamma_H)}(\psi^{\mathbf{M}'})=O_{\gamma_H}(\psi^{\mathbf{M}'})$ pour tout $\omega\in\Omega^{\mathbf{M}}$. D'après (ii), il suffit donc de voir comment C et $I(\gamma_H)$ varient. Il est facile de voir que l'ensemble C est le même pour tous les $\omega(\gamma_H)$, $\omega\in\Omega^{\mathbf{M}}$. On utilise les notations $u_1,\dots,u_r,v_1,\dots,v_t$ de la fin de 3.2 pour les générateurs de $\Omega^{\mathbf{M}}$. Si $j\in\{1,\dots,t\}$, alors $I(v_j(\gamma_H))=I(\gamma_H)$. Si $i\in I(\gamma_H)$, alors $I(u_i(\gamma_H))=I(\gamma_H)-\{i\}$; si $i\in\{1,\dots,r\}-I(\gamma_H)$, alors $I(u_i(\gamma_H))=I(\gamma_H)\cup\{i\}$. Le point (iii) résulte de ces observations et de la définition de $\varepsilon_{s_M}:\Omega^{\mathbf{M}}\longrightarrow\{\pm1\}$.

□

5. Stabilisation

On commence par rappeler les normalisations des mesures de Haar et des facteurs de transfert que l'on utilise (ce sont celles du chapitre 5 de [M2]). On renvoie à [M2] 5.3 pour le rappel de ce qui est su sur les lemmes fondamentaux et conjectures de transfert qui apparaissent dans cet article (en résumé, tous les résultats nécessaires sont maintenant démontrés grâce aux travaux de Kottwitz, Clozel, Labesse, Hales, Waldspurger, Laumon-Ngo et Ngo).

5.1 Normalisations

Mesures de Haar On utilise les règles suivantes pour normaliser les mesures de Haar :

(1) Lorsque l'on est dans la situation du théorème 1.2.1 on utilise les normalisations définies juste avant ce théorème.

(2) Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe sur $\mathbb{Q}$. On choisit toujours sur $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ une mesure de Haar telle que les volumes des sous-groupes compacts ouverts soient des nombres rationnels. Soit p un nombre premier en lequel $\mathbf{G}$ est non ramifié, et soit L une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$; alors on choisit sur $\mathbf{G}(L)$ la mesure de Haar telle que le volume des sous-groupes compacts hyperspéciaux soit 1. Si on a fixé une mesure de Haar dg_f sur $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, alors on choisit la mesure de Haar dg_∞ sur $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ telle que $dg_f dg_\infty$ soit la mesure de Tamagawa sur $\mathbf{G}(\mathbb{A})$ (cf [O]).

(3) (cf [K5] 5.2) Soient F un corps local de caractéristique 0, $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe sur F et $\gamma \in \mathbf{G}(F)$ semi-simple. On note $I = \mathbf{G}_\gamma$, et on choisit des mesures de Haar sur $\mathbf{G}(F)$ et $I(F)$. Si $\gamma' \in \mathbf{G}(F)$ est stablement conjugué à γ, alors $I' = \mathbf{G}_{\gamma'}$ est une forme intérieure de I, donc la mesure sur $I(F)$ donne une mesure sur $I'(F)$. Lorsque l'on forme l'intégrale orbitale stable en γ d'une fonction de $C_c^\infty(\mathbf{G}(F))$, on utilise ces mesures sur les centralisateurs des éléments stablement conjugués à γ.

(4) Soient F un corps local ou global de caractéristique 0, $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe sur F et $(\mathbf{H}, s, \eta_0)$ un triplet endoscopique elliptique de $\mathbf{G}$. Soit $\gamma_H \in \mathbf{H}(F)$ un élément semi-simple $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$-régulier. On suppose qu'il existe une image $\gamma \in \mathbf{G}(F)$ de γ_H. Alors $I = \mathbf{G}_\gamma$ est une forme intérieure de $I_H = \mathbf{H}_{\gamma_H}$ ([K5] 3.1). On choisit toujours des mesures de Haar qui se correspondent sur $I(F)$ et $I_H(F)$.

(5) Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe sur $\mathbb{Q}$ comme dans 1.2, et soit $(\gamma_0; \gamma, \delta)$ un triplet vérifiant les conditions (C) de 1.2 et tel que l'invariant $\alpha(\gamma_0; \gamma, \delta)$ soit trivial. Alors on peut associer à $(\gamma_0; \gamma, \delta)$ un groupe (réductif connexe sur $\mathbb{Q}$) I comme dans 1.2 tel que $I_\mathbb{R}$ soit une forme intérieure de $I(\infty) := \mathbf{G}_{\mathbb{R},\gamma_0}$. Si on a choisi une mesure de Haar sur $I(\mathbb{R})$ (par exemple en suivant la règle (2), si on a déjà une mesure de Haar sur $I(\mathbb{A}_f)$), alors on prend sur $I(\infty)(\mathbb{R})$ la mesure de Haar correspondante.

Facteurs de transfert On renvoie à [K5] pour l'énoncé des propriétés des facteurs de transfert que l'on utilisera ici. Noter que les facteurs de transfert ont été définis en toute généralité (pour l'endoscopie ordinaire) par Langlands et Shelstad, cf [LS1] et [LS2]. La relation de [K5] 5.6 est prouvée dans [LS2] 4.2, et la conjecture 5.3 de [K5] est prouvée dans la proposition 1 (section 3) de [K6].

Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe sur $\mathbb{Q}$, et soit $(\mathbf{H}, s, \eta_0)$ un triplet endoscopique elliptique de $\mathbf{G}$. On choisit un L-morphisme $\eta : {}^L\mathbf{H} \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$ qui prolonge η_0. Les facteurs de transfert locaux associés à η ne sont définis qu'à un scalaire près. On suppose désormais que $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, et on fixe une normalisation des facteurs de transfert.

En la place infinie, on normalise le facteur de transfert comme dans [K7] §7 p 184-185 (cette normalisation est rappelée dans 3.2), en utilisant le morphisme j de 3.2 et le sous-groupe de Borel standard.

Soit p un nombre premier tel que $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ soient non ramifiés en p. On normalise le facteur de transfert en p comme dans [K7] §7 p 180-181. Si η est non ramifié en p, alors cette normalisation est celle donnée par les $\mathbb{Z}_p$-structures sur $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$, définie par Hales (cf [Ha] II 7 et [W3] 4.6).

On choisit les facteurs de transfert aux autres places de manière à ce que la propriété [K5] 6.10 (b) soit vérifiée. On note $\Delta_{\mathbf{H},v}^{\mathbf{G}}$ les facteurs de transfert ainsi normalisés.

Soit $\mathbf{M}$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$, et soit $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0}) \in \mathcal{E}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ d'image $(\mathbf{H}, s, \eta_0)$ dans $\mathcal{E}(\mathbf{G})$. Comme dans 2.2, 3.2 et 4), on associe à $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0})$ un sous-groupe de Levi $\mathbf{M}_H \simeq \mathbf{M}'$ de $\mathbf{H}$ et un L-morphisme $\eta_M : {}^L\mathbf{M}_H = {}^L\mathbf{M}' \longrightarrow {}^L\mathbf{M}$ qui prolonge $\eta_{M,0}$. On va définir une normalisation des facteurs de transfert pour η_M associée à ces données.

En la place infinie, on normalise le facteur de transfert comme dans 3.2, pour le sous-groupe de Borel de $\mathbf{M}$ intersection avec $\mathbf{M}$ du sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$ choisi ci-dessus.

Si v est une place finie de $\mathbb{Q}$, on normalise le facteur de transfert en v pour que

$$\Delta^{\mathbf{M}}_{\mathbf{M}_H,v}(\gamma_H,\gamma)=|D^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}_H}(\gamma_H)|^{1/2}|D^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}}(\gamma)|^{-1/2}\Delta^{\mathbf{G}}_{\mathbf{H},v}(\gamma_H,\gamma),$$

si $\gamma_H\in\mathbf{M}_H(\mathbb{Q}_v)$ est semi-simple $\mathbf{G}$-régulier et $\gamma\in\mathbf{M}(\mathbb{Q}_v)$ est une image de γ_H (cf [K8] lemme 7.5).

On note $\Delta^{\mathbf{M}}_{\mathbf{M}_H,s_M,v}$ les facteurs de transfert ainsi normalisés. On remarque que, si p est une place finie où $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont non ramifiés, alors $\Delta^{\mathbf{M}}_{\mathbf{M}_H,s_M,p}$ ne dépend que de l'image de $(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0})$ dans $\mathcal{E}(\mathbf{M})$ (car c'est simplement le facteur de transfert en p pour η_M normalisé comme dans [K7] p 180-181, c'est-à-dire, si η_M est non ramifié en p, avec la normalisation donnée par les $\mathbb{Z}_p$-structures sur $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_H$). En revanche, les facteurs de transfert $\Delta^{\mathbf{M}}_{\mathbf{M}_H,s_M,v}$ en la place infinie, en les places finies où $\mathbf{G}$ ou $\mathbf{H}$ est ramifié dépendent en général de $(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0})\in\mathcal{E}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$, et pas uniquement de son image dans $\mathcal{E}(\mathbf{M})$ (d'où le "s_M" dans la notation).

5.2 Le côté géométrique de la formule des traces stables, d'après Kottwitz

On rappelle ici la formule de Kottwitz sur le côté géométrique de la formule des traces stable pour une fonction cuspidale stable en la place infinie. La référence est [K8].

On utilise les notations de 3.1. Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$. On suppose que $\mathbf{G}$ est cuspidal (c'est-à-dire que $(\mathbf{G}/\mathbf{A}_{\mathbf{G}})_{\mathbb{R}}$ a un tore maximal anisotrope). Soit K_∞ un sous-groupe compact maximal de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. Soient $\mathbf{G}^*$ une forme intérieure de $\mathbf{G}$ sur $\mathbb{Q}$ qui est quasi-déployée, $\overline{\mathbf{G}}$ une forme intérieure de $\mathbf{G}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $(\overline{\mathbf{G}}/\mathbf{A}_{\mathbf{G},\mathbb{R}})(\mathbb{R})$ soit compact et $\mathbf{T}_e$ un tore maximal elliptique de $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$. On note

$$\overline{v}(\mathbf{G})=e(\overline{\mathbf{G}})\,\mathrm{vol}(\overline{\mathbf{G}}(\mathbb{R})/\mathbf{A}_{\mathbf{G}}(\mathbb{R})^0)$$

($e(\overline{\mathbf{G}})$ est le signe associé à $\overline{\mathbf{G}}$ dans [K1]), et

$$k(\mathbf{G})=|Im(\mathbf{H}^1(\mathbb{R},\mathbf{T}_e\cap\mathbf{G}_{der})\longrightarrow\mathbf{H}^1(\mathbb{R},\mathbf{T}_e))|.$$

Pour tout sous-groupe de Levi $\mathbf{M}$ de $\mathbf{G}$, on note comme dans 2.2

$$n^G_M=|(\mathrm{Nor}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})/\mathbf{M})(\mathbb{Q})|;$$

de plus, si $\gamma\in\mathbf{M}(\mathbb{Q})$, on note

$$\bar{\iota}^M(\gamma)=|(Cent_M(\gamma)/Cent_M(\gamma)^0)(\mathbb{Q})|.$$

Soit ν un quasi-caractère de $\mathbf{A}_G(\mathbb{R})^0$. On note $\Pi_{temp}(\mathbf{G}(\mathbb{R}),\nu)$ (resp. $\Pi_{disc}(\mathbf{G}(\mathbb{R}),\nu)$) l'ensemble des éléments π de $\Pi_{temp}(\mathbf{G}(\mathbb{R}))$ (resp. $\Pi_{disc}(\mathbf{G}(\mathbb{R}))$) tels que la restriction à $\mathbf{A}_G(\mathbb{R})^0$ du caractère central de π est ν. On note $C^\infty_c(\mathbf{G}(\mathbb{R}),\nu^{-1})$ l'ensemble des fonctions $f_\infty:\mathbf{G}(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{C}$ lisses à support compact modulo $\mathbf{A}_G(\mathbb{R})^0$ et telles que, pour tout $(z,g)\in\mathbf{A}_{\mathbf{G}}(\mathbb{R})^0\times\mathbf{G}(\mathbb{R})$, $f_\infty(zg)=\nu^{-1}(z)f_\infty(g)$. On dit que $f_\infty\in C^\infty_c(\mathbf{G}(\mathbb{R}),\nu^{-1})$ est *cuspidale stable* si f_∞ est K_∞-finie à droite et à gauche et si la fonction

$$\Pi_{temp}(\mathbf{G}(\mathbb{R}),\nu)\longrightarrow\mathbb{C},\pi\longmapsto Tr(\pi(f_\infty))$$

est nulle en dehors de $\Pi_{disc}(\mathbf{G}(\mathbb{R}),\nu)$ et constante sur les L-paquets de $\Pi_{disc}(\mathbf{G}(\mathbb{R}),\nu)$.

Soit $f_\infty\in C^\infty_c(\mathbf{G}(\mathbb{R}),\nu^{-1})$. Pour tout L-paquet Π de $\Pi_{disc}(\mathbf{G}(\mathbb{R}),\nu)$, on note $Tr(\Pi(f_\infty))=\sum\limits_{\pi\in\Pi}Tr(\pi(f_\infty))$ et $\Theta_\Pi=\sum\limits_{\pi\in\Pi}\Theta_\pi$. Pour tout sous-groupe de Levi cuspidal $\mathbf{M}$ de $\mathbf{G}$, on définit une fonction $S\Phi_{\mathbf{M}}(.,f_\infty)=S\Phi^G_M(.,f_\infty)$ sur $\mathbf{M}(\mathbb{R})$ par la formule

$$S\Phi_{\mathbf{M}}(\gamma,f_\infty)=(-1)^{\dim(\mathbf{A_M}/\mathbf{A_G})}k(\mathbf{M})k(\mathbf{G})^{-1}\overline{v}(\mathbf{M}_\gamma)^{-1}\sum_\Pi\Phi_{\mathbf{M}}(\gamma^{-1},\Theta_\Pi)Tr(\Pi(f_\infty)),$$

où Π parcourt l'ensemble des L-paquets de $\Pi_{disc}(\mathbf{G}(\mathbb{R}),\nu)$ et $\mathbf{M}_\gamma=\mathrm{Cent}_{\mathbf{M}}(\gamma)$. On a bien sûr $S\Phi_{\mathbf{M}}(\gamma,f_\infty)=0$ si γ n'est pas semi-simple elliptique dans $\mathbf{M}(\mathbb{R})$. Si $\mathbf{M}$ n'est pas cuspidal, on pose $S\Phi^G_M=0$.

Soit $f:\mathbf{G}(\mathbb{A})\longrightarrow\mathbb{C}$. On suppose que $f=f^\infty f_\infty$, avec $f^\infty\in C_c^\infty(\mathbf{G}(\mathbb{A}_f))$ et $f_\infty\in C_c^\infty(\mathbf{G}(\mathbb{R}),\nu^{-1})$. Pour tous sous-groupe de Levi $\mathbf{M}$ de $\mathbf{G}$, on note

$$ST_M^G(f)=\tau(\mathbf{M})\sum_\gamma \bar{\iota}^M(\gamma)^{-1}SO_\gamma(f_{\mathbf{M}}^\infty)S\Phi_{\mathbf{M}}(\gamma,f_\infty),$$

où γ parcourt l'ensemble des classes de conjugaison stables dans $\mathbf{M}(\mathbb{Q})$ qui sont semi-simples et elliptiques dans $\mathbf{M}(\mathbb{R})$, et $f_{\mathbf{M}}^\infty$ est le terme constant de f^∞ en un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ de sous-groupe de Levi $\mathbf{M}$. On pose

$$ST^G(f)=\sum_{\mathbf{M}}(n_M^G)^{-1}ST_M^G(f),$$

où $\mathbf{M}$ parcourt l'ensemble des classes de conjugaison (sous $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$) de sous-groupes de Levi de $\mathbf{G}$.

Dans le cas où le groupe dérivé de $\mathbf{G}$ est simplement connexe et $\mathbf{G}$ est quasi-déployé, Kottwitz a montré ([K8], théorème 5.1) que $ST^G(f)$ est le côté géométrique de la formule des traces stable pour $\mathbf{G}$ si f_∞ est stable cuspidale. Il y a deux problèmes si l'on veut utiliser ce résultat. D'abord, [K8] n'est pas publié. Ensuite, il n'est connu que dans le cas où $\mathbf{G}^{der}$ est simplement connexe, alors que l'on voudrait l'utiliser pour les groupes endoscopiques des groupes symplectiques, qui ne vérifient pas cette propriété en général (ceci n'est sans doute pas sérieux, car, dans la stabilisation de la formule des points fixes, les termes correspondant aux éléments de centralisateur non connexe sont automatiquement nuls). Cependant, rien ne nous empêche d'utiliser la distribution ST^G (qui est bien définie) au lieu du côté géométrique de la formule des traces stable, et c'est ce que nous ferons dans la suite.

On peut tout de même, en utilisant le même raisonement que dans l'article [Lau1] de Laumon, montrer le résultat ci-dessous, qui est essentiellement une conséquence triviale du théorème 5.1 de [K8] et qui permettra d'obtenir des applications de la stabilisation de la formule des points fixes pour $\mathbf{GSp}_4$ et $\mathbf{GSp}_6$.

Proposition 5.2.1. *Notons, pour $\mathbf{G}$ réductif connexe sur $\mathbb{Q}$, T^G la distribution de la formule des traces invariante d'Arthur. Alors, si $\mathbf{G}=\mathbf{GSp}_{2n}$ ou $\mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2n}\times\mathbf{SO}_4)$ et si $f=f^\infty f_\infty:\mathbf{G}(\mathbb{A})\longrightarrow\mathbb{C}$ est comme ci-dessus, avec f_∞ cuspidale stable, alors $T^G(f)=ST^G(f)$.*

Démonstration. Supposons d'abord que $\mathbf{G}=\mathbf{GSp}_{2n}$. Alors, d'après la preuve du lemme 3.1 de [Lau1], les κ-intégrales orbitales de f_∞ sont nulles si $\kappa\neq 1$ (cela résulte du fait que f_∞ est cuspidale stable et que $\mathrm{H}^1(\mathbb{R},\mathbf{GSp}_{2n})=\{1\}$). Le même raisonnement montre que, pour tout sous-groupe de Levi cuspidal $\mathbf{M}$ de $\mathbf{G}$, les analogues pour $\Phi_M^G(.,f_\infty)$ des κ-intégrales orbitales (définies comme dans le lemme 8.3.2 de [M2]) s'annulent si $\kappa\neq 1$. Grâce à ces observations, il suffit pour obtenir le résultat d'appliquer à tout Levi cuspidal $\mathbf{M}$ le processus de préstabilisation de la partie elliptique de la formule des traces, qui est décrit par exemple dans le début de la preuve du théorème 9.6 de [K5] (cf en particulier la formule (9.6.5) de loc. cit.).

Supposons maintenant que $\mathbf{G}=\mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2n}\times\mathbf{SO}_4)$. Remarquons d'abord que $\mathbf{GSO}_4$ est isomorphe au groupe $\mathbf{H}=\mathbf{GL}_1\setminus(\mathbf{GL}_2\times\mathbf{GL}_2)$ de [Lau1] (défini dans (2.6) de cet article), et qu'on peut choisir un isomorphisme qui envoie $c:\mathbf{GSO}_4\longrightarrow\mathbb{G}_m$ sur le morphisme $\mathbf{GL}_1\setminus(\mathbf{GL}_2\times\mathbf{GL}_2)$, $(g_1,g_2)\longmapsto\det(g_1)\det(g_2)$.[4] Soient F un corps local ou global, $\mathbf{M}$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$ et $\gamma\in\mathbf{M}(F)$. On note $I=\mathbf{M}_\gamma$, $\mathbf{G}_1=\mathbf{GSp}_{2n}$, $\mathbf{M}_1=\mathbf{M}\cap\mathbf{G}_1$ (un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}_1$) et

4. Indiquons comment construire un tel isomorphisme. (Cette construction est celle de [D], Chapitre IV, section 8, point 7.) Le groupe $\mathbf{GSO}_4$ est isomorphe au groupe $\mathbf{GSO}(M_2(\mathbb{Q}),\langle.,.\rangle)$, où $M_2(\mathbb{Q})$ est l'algèbre des matrices carrées de taille 2 sur $\mathbb{Q}$, vue ici simplement comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 4, et $\langle.,.\rangle$ est la forme bilinéaire symétrique sur $M_2(\mathbb{Q})$ qui envoie (X,Y) sur $\mathrm{Tr}({}^tXJYJ^{-1})$, avec $J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. On définit un morphisme $u:\mathbf{GL}_2\times\mathbf{GL}_2\longrightarrow\mathbf{GL}(M_2(\mathbb{Q}))$ en envoyant $(g_1,g_2)\in\mathbf{GL}_2\times\mathbf{GL}_2$ sur l'automorphisme linéaire $X\longmapsto g_1Xg_2$ de

$I_1 = I \cap \mathbf{M}_1$. Si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ avec $\gamma_1 \in \mathbf{GSp}_{2n}$ et $\gamma_2 \in \mathbf{GSO}_4$, alors il est clair que $\gamma_1 \in \mathbf{M}_1(F)$ et $I_1 = \mathbf{M}_{1,\gamma_1}$. En utilisant le raisonnement de le preuve du lemme 3.2 de [Lau1] (avec la suite exacte $1 \longrightarrow \mathbf{G}_1 \longrightarrow \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{PGL}_2 \times \mathbf{PGL}_2 \longrightarrow 1$ au lieu de la suite exacte $1 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbf{H} \longrightarrow \overline{\mathbf{H}} \longrightarrow 1$ de loc. cit.), on montre facilement que le morphisme évident $\mathfrak{K}_{\mathbf{G}_1}(I_1/F) \longrightarrow \mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I/F)$ est un isomorphisme. Une fois cette égalité connue, on peut finir la preuve exactement comme dans le cas $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_{2n}$.

□

Enfin, on calcule $k(\mathbf{G})$ pour $\mathbf{G}$ un groupe orthogonal-symplectique.

Lemme 5.2.2. *Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ avec n_2 pair. On note $n = n_1 + n_2$ et $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2n_1} \times \mathbf{SO}_{2n_2})$. Alors*

$$k(\mathbf{G}) = \begin{cases} 1 & \textit{si } n = 0 \\ 2^{n-1} & \textit{si } n \geqslant 1 \textit{ et } n_2 = 0 \\ 2^{n-2} & \textit{si } n \geqslant 1 \textit{ et } n_2 \geqslant 1 \end{cases}.$$

En particulier, $k(\mathbb{G}_m) = k(\mathbf{GSp}_0) = 1 = k(\mathbf{GL}_2) = k(\mathbf{GSp}_2) = 1$.

Démonstration. On note $\Gamma(\infty) = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal elliptique de $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$. D'après [K8] (7.9.3) (cf la preuve du lemme 5.4.2 de [M2]), on a

$$k(\mathbf{G}) = |\pi_0(\widehat{\mathbf{T}}^{\Gamma(\infty)})||\pi_0(Z(\widehat{\mathbf{G}})^{\Gamma(\infty)})|^{-1}.$$

On utilise le tore maximal $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{ell}$ de $\mathbf{G}$ défini dans 3.1. Comme $\mathbf{G}$ est déployé, $\Gamma(\infty)$ agit trivialement sur $Z(\widehat{\mathbf{G}})$, donc $|\pi_0(Z(\widehat{\mathbf{G}})^{\Gamma(\infty)})| = |\pi_0(Z(\widehat{\mathbf{G}}))|$. Or on a déjà vu (dans la preuve du lemme 2.1.2) que $|\pi_0(Z(\widehat{\mathbf{G}}))|$ est égal à 1 si $n_2 = 0$, et à 2 si $n_2 \geqslant 1$. De plus, on a vu dans la remarque 3.1.3 que $\mathbf{T} \simeq \mathbf{G}(\mathbf{U}(1)^n)$, où $\mathbf{U}(1)$ est le groupe des éléments de norme 1 de $E = \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$. Donc $\widehat{\mathbf{T}}^{\Gamma(\infty)} = \widehat{\mathbf{T}}^{\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})}$ est calculé dans le point (i) du lemme 2.3.3 de [M2], et la conclusion résulte de ce calcul.

□

Lemme 5.2.3. *([K8] (7.8.1)) Soient $\mathbf{M}$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G} := \mathbf{GSp}_{2n}$, $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0}) \in \mathcal{E}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ et $(\mathbf{H}, s, \eta_0)$ le triplet endoscopique elliptique de $\mathbf{G}$ associé. On suppose que $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{H}$ sont cuspidaux. Alors*

$$\frac{\tau(\mathbf{G})}{\tau(\mathbf{H})}\frac{\tau(\mathbf{M}')}{\tau(\mathbf{M})} = \frac{k(\mathbf{H})}{k(\mathbf{G})}\frac{k(\mathbf{M})}{k(\mathbf{M}')}.$$

Il s'agit d'un résultat général, qui est démontré dans [K8] 8.1. Ici, il est facile de le vérifier directement en utilisant les lemmes 2.1.2, 2.2.3 et 5.2.2.

5.3 Stabilisation de la formule des points fixes

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_{2n}$, et on considère la donnée de Shimura de 1.1. On fixe un nombre premier p, un entier naturel non nul j, une représentation algébrique V de $\mathbf{G}$ et une fonction $f^{p,\infty} = \prod_{v \neq p,\infty} f_v \in C_c^\infty(\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p))$. On note $\varphi : W_{\mathbb{R}} \longrightarrow \widehat{\mathbf{G}} \times W_{\mathbb{R}}$ un paramètre de Langlands du L-paquet de la série discrète de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ associé à la contragrédiente de V (cf 3.1, après la remarque 3.1.5). On identifie l'ensemble $\mathcal{E}(\mathbf{G})$ de 2.2 à l'ensemble des données déterminées comme dans la proposition 2.1.1 par les entiers n_1 tels que $0 \leqslant n_1 \leqslant n$ et $n_1 \neq n-1$, et on note $\mathcal{E}^0(\mathbf{G})$ le

$M_2(\mathbb{Q})$. Alors le noyau de u est $\mathbf{GL}_1$ (plongé dans $\mathbf{GL}_2 \times \mathbf{GL}_2$ par $\lambda \longmapsto (\lambda I_2, \lambda^{-1} I_2)$ comme dans [Lau1] (2.6)), et l'image de u est $\mathbf{GSO}(M_2(\mathbb{Q}), \langle .,. \rangle)$.

sous-ensemble des données déterminées par un n_1 tel que $n-n_1$ soit pair. Pour tout sous-groupe de Levi cuspidal $\mathbf{M}$ de $\mathbf{G}$, on note $\mathcal{E}^0_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ dont l'image dans $\mathcal{E}(\mathbf{G})$ est équivalente à un élément de $\mathcal{E}^0(\mathbf{G})$. On identifie $\mathcal{E}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ et $\mathcal{E}^0_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ avec les ensembles de représentants donnés par le lemme 2.2.3.

Soit $(\mathbf{H},s,\eta_0)\in\mathcal{E}^0(\mathbf{G})$. On choisit comme prolongement $\eta:{}^L\mathbf{H}\longrightarrow{}^L\mathbf{G}$ de η_0 le morphisme $\eta_0\times id_{W_{\mathbb{Q}}}$. On définit une fonction $f^{(j)}_{\mathbf{H}}=f^{(j)}_{\mathbf{H},p}\prod\limits_{v\neq p}f_{\mathbf{H},v}\in C^\infty(\mathbf{H}(\mathbb{A}))$ de la manière suivante (cf la section 7 de [K7]) :

- Pour toute place $v\neq p,\infty$ de $\mathbb{Q}$, $f_{\mathbf{H},v}$ est un transfert de f_v (au sens habituel, qui est rappelé dans [M2] 5.3).
- $f^{(j)}_{\mathbf{H},p}$ est la fonction de $\mathcal{H}(\mathbf{H}(\mathbb{Q}_p),\mathbf{H}(\mathbb{Z}_p))$ obtenue par transfert tordu à partir de $\phi^{\mathbf{G}}_j$ en utilisant $\eta_0\times id_{W_{\mathbb{Q}_p}}$ comme prolongement de η_0 (cf la section 4, et cf la preuve de la proposition 4.1 pour le calcul explicite de la transformée de Satake de $f^{(j)}_{\mathbf{H},p}$).
- On utilise les notations de la section 3. Pour tout paramètre de Langlands elliptique φ_H : $W_{\mathbb{R}}\longrightarrow\widehat{\mathbf{H}}\rtimes W_{\mathbb{R}}$, on pose
$$f_{\varphi_H}=d(\mathbf{H})^{-1}\sum_{\pi\in\Pi(\varphi_H)}f_\pi.$$
On note $\mathbf{B}$ le sous-groupe de Borel standard de $\mathbf{G}_{\mathbb{C}}$ (c'est-à-dire le groupe des matrices triangulaires supérieures). Il détermine comme dans 3.2 un sous-ensemble $\Omega_*\subset\Omega_G$ et une bijection $\Phi_H(\varphi)\xrightarrow{\sim}\Omega_*$, $\varphi_H\longmapsto\omega_*(\varphi_H)$. On prend
$$f_{\mathbf{H},\infty}=(-1)^{q(\mathbf{G})}\sum_{\varphi_H\in\Phi_H(\varphi)}\det(\omega_*(\varphi_H))f_{\varphi_H}.$$

Remarque 5.3.1. Dans [K7] §7, on a un facteur $<\mu,s>$ dans $f_{\mathbf{H},\infty}$, où μ est le cocaractère de $\mathbf{G}_{\mathbb{C}}$ déterminé par la donnée de Shimura comme dans 1.1. Ici, comme $(\mathbf{H},s,\eta_0)\in\mathcal{E}^0(\mathbf{G})$, on a $<\mu,s>=1$.

On note $f^\infty=f^{\infty,p}\mathbb{1}_{\mathbf{G}(\mathbb{Z}_p)}$.

Théorème 5.3.2. *Soit $\mathbf{M}$ un sous-groupe de Levi cuspidal standard de $\mathbf{G}$. Alors, pour j assez grand,*
$$\mathrm{Tr}_M(f^\infty,j)=(n^G_M)^{-1}\sum_{(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0})\in\mathcal{E}^0_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})}\tau(\mathbf{G})\tau(\mathbf{H})^{-1}|\Lambda_{\mathbf{G}}(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0})|^{-1}ST^H_{M'}(f^{(j)}_{\mathbf{H}}),$$
où $\mathrm{Tr}_M(f^\infty,j)$ est défini au-dessus du théorème 1.2.1 et, pour tout $(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0})\in\mathcal{E}^0_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$, $(\mathbf{H},s,\eta_0)$ est l'élément de $\mathcal{E}^0(\mathbf{G})$ correspondant.

Pour $\mathbf{M}=\mathbf{G}$, ce théorème est dû à Kottwitz ([K7] théorème 7.2).

Corollaire 5.3.3. *Si j est assez grand, alors*
$$\mathrm{Tr}(Frob^j_p\times f^\infty,\mathrm{H}^*(\overline{S}^{\mathrm{K}}_{\overline{\mathbb{Q}}},IC^{\mathrm{K}}V))=\sum_{(\mathbf{H},s,\eta_0)\in\mathcal{E}^0(\mathbf{G})}\iota(\mathbf{G},\mathbf{H})ST^H(f^{(j)}_{\mathbf{H}}).$$

Démonstration. Comme $\mathbf{G}$ est déployé, le corollaire résulte immédiatement du théorème ci-dessus et du lemme 2.2.2.

□

Remarque 5.3.4. Comme dans [M2] 7.1, on pourrait donner un sens au corollaire (ou même au théorème) pour tout $j\in\mathbb{Z}$ et prouver que la validité du corollaire pour $j>>0$ implique sa validité pour tout $j\in\mathbb{Z}$.

Démonstration du théorème. Comme j est fixé, on omet l'exposant (j) dans cette preuve. Soit $\mathbf{P}$ le sous-groupe parabolique standard de $\mathbf{G}$ de sous-groupe de Levi $\mathbf{M}$. On note $\mathbf{M}_l$ la partie linéaire de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_h$ sa partie hermitienne. Comme dans 1.1, on a $m, r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}$ tels que $n = m + r_1 + \dots + r_k$, $\mathbf{M}_h \simeq \mathbf{GSp}_{2m}$ et $\mathbf{M}_l \simeq \mathbf{GL}_{r_1} \times \dots \times \mathbf{GL}_{r_k}$. Comme $\mathbf{M}$ est cuspidal, $r_i \leqslant 2$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$; on a donc, quitte à changer l'ordre des facteurs, $\mathbf{M}_l \simeq \mathbb{G}_m^r \times \mathbf{GL}_2^t$, avec $r, t \in \mathbb{N}$ tels que $r + 2t = n - m$.

Comme le théorème est déjà connu pour $\mathbf{M} = \mathbf{G}$, on peut supposer que $\mathbf{M} \neq \mathbf{G}$. D'après le lemme 2.2.3, on a $|\Lambda_{\mathbf{G}}(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0})| = 1$ pour tout $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0}) \in \mathcal{E}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$. Notons, avec les conventions de l'énoncé,

$$\mathrm{Tr}'_M = (n_M^G)^{-1} \sum_{(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0}) \in \mathcal{E}^0_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})} \tau(\mathbf{G}) \tau(\mathbf{H})^{-1} ST^H_{M'}(f_{\mathbf{H}}).$$

D'après la définition de $ST^H_{M'}$ dans 5.2, on a

$$\mathrm{Tr}'_M = (n_M^G)^{-1} \tau(\mathbf{G}) \sum_{(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0}) \in \mathcal{E}^0_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})} \tau(\mathbf{H})^{-1} \tau(\mathbf{M}') \sum_{\gamma'} SO_{\gamma'}((f^\infty_{\mathbf{H}})_{\mathbf{M}'}) S\Phi^H_{M'}(\gamma', f_{\mathbf{H},\infty}),$$

où γ' parcourt l'ensemble des classes de conjugaison stable semi-simples de $\mathbf{M}'(\mathbb{Q})$ qui sont elliptiques dans $\mathbf{M}'(\mathbb{R})$. D'après la proposition 3.2.5 (et la remarque 3.2.6), seuls les termes indexés par une classe de conjugaison γ' qui est $(\mathbf{M}, \mathbf{M}')$-régulière peuvent être non nuls. D'après le lemme 2.2.6, on a

$$\mathrm{Tr}'_M = (n_M^G)^{-1} \tau(\mathbf{G}) \sum_{\gamma_{0,M}} \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I_M/\mathbb{Q})_e} \tau(\mathbf{M}') \tau(\mathbf{H})^{-1} \psi(\gamma_{0,M}, \kappa),$$

où :

- $\gamma_{0,M}$ parcourt l'ensemble des classes de conjugaison stable semi-simples de $\mathbf{M}(\mathbb{Q})$ qui sont elliptiques dans $\mathbf{M}(\mathbb{R})$.
- $I_M = \mathbf{M}_{\gamma_{0,M}}$ et $\mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I_M/\mathbb{Q})$ est défini au-dessus du lemme 2.2.6.
- Soient $\gamma_{0,M}$ comme ci-dessus et $\kappa \in \mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I_M/\mathbb{Q})$. Soit $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0}, \gamma')$ un $\mathbf{G}$-quadruplet endoscopique associé à κ par le lemme 2.2.6 ; on choisit toujours $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0})$ dans l'ensemble de représentants du lemme 2.2.3 (donc s_M est uniquement déterminé par κ). Le sous-ensemble $\mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I_M/\mathbb{Q})_e$ de $\mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I_M/\mathbb{Q})$ est l'ensemble des κ tels que $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0}) \in \mathcal{E}^0_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$. Si $\kappa \in \mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I_M/\mathbb{Q})_e$, on note

$$\psi(\gamma_{0,M}, \kappa) = SO_{\gamma'}((f^\infty_{\mathbf{H}})_{\mathbf{M}'}) S\Phi^H_{M'}(\gamma', f_{\mathbf{H},\infty}),$$

  où $\mathbf{H}$ a la même signification qu'avant.

Donc

$$\mathrm{Tr}'_M = (n_M^G)^{-1} \sum_{\gamma_{0,M}} \sum_{\kappa_M \in \mathfrak{K}_M(I_M/\mathbb{Q})} \Psi(\gamma_{0,M}, \kappa_M),$$

où, avec les mêmes notations qu'avant,

$$\Psi(\gamma_{0,M}, \kappa_M) = \tau(\mathbf{G}) \sum_{\substack{\kappa \in \mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I_M/\mathbb{Q})_e \\ \kappa \longmapsto \kappa_M}} \tau(\mathbf{M}') \tau(\mathbf{H})^{-1} \psi(\gamma_{0,M}, \kappa).$$

(Il y a un morphisme canonique $\mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I_M/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathfrak{K}_{\mathbf{M}}(I_M/\mathbb{Q})$, cf la remarque 2.2.5.)

On définit le groupe d'automorphismes Ω^M de $\mathbf{M}$ comme dans 3.2 et 4. Rappelons que ce groupe agit sur $\mathbf{M}$ par conjugaison par des éléments de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$. On a clairement $\Omega^{\mathbf{M}} \simeq \{\pm 1\}^r \times \{\pm 1\}^t$, donc $|\Omega^{\mathbf{M}}| = 2^{r+t}$.

On fixe $\gamma_{0,M}$ et $\kappa \in \mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I_M/\mathbb{Q})_e$ comme ci-dessus, et on note κ_M l'image de κ dans $\mathfrak{K}_{\mathbf{M}}(I_M/\mathbb{Q})$. On écrit $\gamma_{0,M} = \gamma_{0,L}\gamma_0$, avec $\gamma_{0,L} \in \mathbf{M}_l(\mathbb{Q})$ et $\gamma_0 \in \mathbf{M}_h(\mathbb{Q})$. Calculons $\psi(\gamma_{0,M}, \kappa)$. Soit $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0}, \gamma')$

un $\mathbf{G}$-quadruplet endoscopique associé à κ par le lemme 2.2.6. On note $(\mathbf{H},s,\eta_0)$ l'élément de $\mathcal{E}^0(\mathbf{G})$ associé à $(\mathbf{M}',s_M,\eta_{M,0})$, et on définit s'_M comme dans 4 (c'est-à-dire égal à s_M dans la composante $\widehat{\mathbf{M}}_h$, et trivial dans la composante $\widehat{\mathbf{M}}_l$) ; on remarque que s'_M ne dépend pas de κ, mais uniquement de κ_M. D'après le (ii) du lemme 5.3.6, on a

$$SO_{\gamma'}((f_{\mathbf{H}}^{p,\infty})_{\mathbf{M}'})=\sum_{\gamma_M}\Delta_{\mathbf{M}',s_M}^{\mathbf{M},\infty,p}(\gamma',\gamma_M)e(\gamma_M)O_{\gamma_P}(f_{\mathbf{M}}^{\infty,p}),$$

où γ_M parcourt l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples de $\mathbf{M}(\mathbb{A}_f^p)$ et $e(\gamma_M)=\prod_{v\neq p,\infty}e(\mathbf{M}_{\mathbb{Q}_v,\gamma_{M,v}})$ (e est le signe de [K1]). D'après [K5] 5.6, cette dernière somme est égale à

$$\Delta_{\mathbf{M}',s_M}^{\mathbf{M},\infty,p}(\gamma',\gamma_{0,M})\sum_{\gamma_M}<\alpha(\gamma_{0,M},\gamma_M),\kappa>e(\gamma_M)O_{\gamma_M}(f_{\mathbf{M}}^{\infty,p}),$$

où γ_M parcourt l'ensemble des classes de conjugaison de $\mathbf{M}(\mathbb{A}_f^p)$ qui sont stablement conjuguées à $\gamma_{0,M}$ en toute place $v\neq p,\infty$ et $\alpha(\gamma_{0,M},\gamma_M)$ est noté $inv(\gamma_{0,M},\gamma_M)$ dans [K5] (l'article [K5] ne fait qu'énoncer une conjecture, mais cette conjecture a été démontrée depuis, voir [M2] 5.3 pour des explications).

Pour tout $\gamma_M\in\mathbf{M}(\mathbb{A}_f^p)$, on écrit $\gamma_M=\gamma_L\gamma$, avec $\gamma_L\in\mathbf{M}_l(\mathbb{A}_f^p)$ et $\gamma\in\mathbf{M}_h(\mathbb{A}_f^p)$. Rappelons que la partie linéaire de $\mathbf{M}$ est isomorphe à $\mathbb{G}_m^r\times\mathbf{GL}_2^t$, et elle est aussi isomorphe à la partie linéaire de $\mathbf{M}'$. Donc, si $\gamma_{0,M}$ et γ_M sont stablement conjugués, alors $\gamma_{0,L}$ et γ_L sont conjugués, et la formule ci-dessus devient

$$SO_{\gamma'}((f_{\mathbf{H}}^{p,\infty})_{\mathbf{M}'})=\Delta_{\mathbf{M}',s_M}^{\mathbf{M},\infty,p}(\gamma',\gamma_{0,M})\sum_{\gamma}<\alpha(\gamma_0,\gamma),s'_M>e(\gamma)O_{\gamma_{0,L}\gamma}(f_{\mathbf{M}}^{\infty,p}),$$

où γ parcourt l'ensemble des classes de conjugaison de $\mathbf{M}_h(\mathbb{A}_f^p)$ qui sont stablement conjuguées à γ_0 en toute place $v\neq p,\infty$ et $\alpha(\gamma_0,\gamma)$, $e(\gamma)$ sont définis comme ci-dessus. En particulier, l'expression ci-dessus ne dépend que de κ_M (et pas de κ).

D'autre part, d'après le corollaire 4.2 (et avec les notations de ce corollaire), on a

$$SO_{\gamma'}((f_{\mathbf{H},p})_{\mathbf{M}'})=\varepsilon_C(s_M)(-1)^{|I(\gamma_{0,M})\cap A|}\sum_{\delta_M}<\alpha_p(\gamma_M,\delta_M),s'_M>\Delta_{\mathbf{M}_H,s_M,p}^{\mathbf{M}}(\gamma_H,\gamma_M)e(\delta_M)TO_{\delta_M}(\phi_{\mathbf{M}}),$$

où δ_M parcourt l'ensemble des classes de σ-conjugaison de $\mathbf{M}(L)$ telles que $\gamma_{0,M}\in\mathcal{N}\delta_M$. Si de plus $\gamma_{0,M}\in\mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)\mathbf{M}_h(\mathbb{Q}_p)$ (ie $\gamma_{0,L}\in\mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)$), alors, d'après le même corollaire,

$$SO_{\gamma'}((f_{\mathbf{H},p})_{\mathbf{M}'})=\delta_{\mathbf{P}(\mathbb{Q}_p)}^{1/2}(\gamma_{0,M})\sum_{\delta_M}<\alpha_p(\gamma_{0,M},\delta_M),s'_M>\Delta_{\mathbf{M}',s_M,p}^{\mathbf{M}}(\gamma',\gamma_{0,M})e(\delta_M)TO_{\delta_M}(\phi_j^{\mathbf{M}}),$$

où δ_M parcourt le même ensemble d'indices ; grâce au résultat principal de [K4] et au fait que $\phi_j^{\mathbf{M}}=\mathbb{1}_{\mathbf{M}_h(\mathcal{O}_L)}\phi_j^{\mathbf{M}_h}$ (cette dernière fonction est définie dans 1.2), cette expression est égale à

$$\delta_{\mathbf{P}(\mathbb{Q}_p)}^{1/2}(\gamma_{0,M})\sum_{\delta}<\alpha_p(\gamma_0,\delta),s'_M>\Delta_{\mathbf{M}',s_M,p}^{\mathbf{M}}(\gamma',\gamma_{0,M})e(\delta)O_{\gamma_{0,L}}(\mathbb{1}_{\mathbf{M}_h(\mathbb{Z}_p)})TO_{\delta}(\phi_j^{\mathbf{M}_h}),$$

où δ parcourt l'ensemble des classes de σ-conjugaison de $\mathbf{M}_h(L)$ telles que $\gamma_0\in\mathcal{N}\delta$ et $\alpha_p(\gamma_0,\delta)$, $e(\delta)$ sont définis de manière analogue à $\alpha_p(\gamma_{0,M},\delta_M)$, $e(\delta_M)$. On remarque que la seule partie de cette dernière expression qui pourrait dépendre de κ est $\Delta_{\mathbf{M}',s_M,p}^{\mathbf{M}}(\gamma',\gamma_{0,M})$.

Enfin, on a $<\alpha_\infty(\gamma_0),s'_M>=1$, où $\alpha_\infty(\gamma_0)$ est comme dans [K7] p 167 (cf la remarque 5.3.1). On en déduit que $\psi(\gamma_{0,M},\kappa)$ est égal au produit de

$$\psi_\infty(\gamma_{0,M},\kappa_M):=\Delta_{\mathbf{M}',s_M,\infty}^{\mathbf{M}}(\gamma',\gamma_{0,M})^{-1}S\Phi_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{H}}(\gamma',f_{\mathbf{H},\infty})$$

et de

$$\psi^{\infty}(\gamma_{0,M},\kappa):=\varepsilon_C(s_M)(-1)^{|I(\gamma_{0,M})\cap A|}\sum_{\gamma}\sum_{\delta_M}<\alpha(\gamma_0,\gamma),s'_M><\alpha(\gamma_{0,M},\delta_M),s'_M>$$
$$e(\gamma)e(\delta_M)O_{\gamma_{0,L}\gamma}(f^{\infty,p}_{\mathbf{M}})TO_{\delta_M}(\phi_{\mathbf{M}}),$$

où γ et δ_M parcourent les mêmes ensembles d'indices qu'avant. De plus, si $\gamma_{0,L}\in\mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)$, alors $\psi^{\infty}(\gamma_{0,M},\kappa)$ est égal à

$$\delta^{1/2}_{P(\mathbb{Q}_p)}(\gamma_{0,M})\sum_{(\gamma,\delta)}<\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta),s'_M>e(\gamma)e(\delta)O_{\gamma_{0,L}\gamma}(f^{\infty,p}_{\mathbf{M}})O_{\gamma_{0,L}}(\mathbb{1}_{\mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)})TO_{\delta}(\phi_j^{\mathbf{M}_h}),$$

où γ et δ parcourent les mêmes ensembles d'indices qu'avant et $\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)$ est comme dans 1.2 (ie défini dans [K7] §2).

Par définition de $S\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}'}$ (cf 5.2) et avec les notations de 3.3, $S\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}'}(\gamma',f_{\mathbf{H},\infty})$ est égal à

$$(-1)^{\dim(\mathbf{A}_M/\mathbf{A}_G)+q(\mathbf{G})}k(\mathbf{M}')k(\mathbf{H})^{-1}\overline{v}(I_M)^{-1}\varepsilon(\kappa)\sum_{\varphi_H\in\Phi_H(\varphi)}\det(\omega_*(\varphi_H))\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}'}(\gamma'^{-1},S\Theta_{\varphi_H}).$$

Le signe $\varepsilon(\kappa)$ est là car les morphismes $\eta:{}^L\mathbf{H}\longrightarrow{}^L\mathbf{G}$ (donc les ensembles Ω_* de 3.2) ne sont pas les mêmes selon que l'on voit $\mathbf{H}$ comme le premier élément d'un triplet endoscopique de $\mathcal{E}^0(\mathbf{G})$ (ce que l'on fait pour définir $f_{\mathbf{H},\infty}$), ou comme le premier élément du triplet endoscopique déterminé par s_M (ce que l'on fait dans la formule ci-dessus).

Supposons que $\Omega^{\mathbf{M}}(\gamma_{0,M})\cap\mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)\mathbf{M}_h(\mathbb{Q}_p)=\varnothing$. Alors l'ensemble C qui apparaît dans le point (ii) du corollaire 4.2 (et dans la formule pour $\psi^{\infty}(\gamma_{0,M},\kappa)$) est non vide. D'après le point (i) de la proposition 3.3.1 et le lemme 5.2.3, $\Psi(\gamma_{0,M},\kappa_M)=0$ (noter que le signe qui est noté $\varepsilon_C(s_M)$ ici et dans 4 est le signe $\varepsilon_C(\kappa)$ de 3.3).

D'autre part, il résulte du point (ii) du lemme 5.3.6 et de la normalisation des facteurs de transfert dans 5.1, si $v\neq p,\infty$, alors $SO_{\gamma'}((f_{\mathbf{H},v})_{\mathbf{M}'})$ ne change pas si on remplace γ' par $\omega(\gamma')$, $\omega\in\Omega^{\mathbf{M}}$ (remarquer que, bien que le groupe $\Omega^{\mathbf{M}}$ n'agisse pas sur $\mathbf{M}'$ par conjugaison par des éléments de $\mathbf{H}(\mathbb{Q})$, la fonction $\gamma'\longmapsto|D^H_{M'}(\gamma')|_v$ est invariante par $\Omega^{\mathbf{M}}$). En appliquant le point (iii) de la proposition 4.1 et le corollaire 3.2.9, on en déduit que $\psi(\omega(\gamma_{0,M}),\kappa)=\psi(\gamma_{0,M},\kappa)$, pour tout $\omega\in\Omega^{\mathbf{M}}$ (quel que soit $\gamma_{0,M}\in\mathbf{M}(\mathbb{Q})$ semi-simple).

On déduit des calculs ci-dessus que

$$\mathrm{Tr}'_M=(n^G_M)^{-1}2^{r+t}\sum_{\gamma_{0,M}}\sum_{\kappa_M\in\mathfrak{K}_M(I_M/\mathbb{Q})}\Psi(\gamma_{0,M},\kappa_M),$$

où, dans la première somme, on se restreint aux $\gamma_{0,M}$ qui sont dans $\mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)\mathbf{M}_h(\mathbb{Q}_p)$.

On fixe $\gamma_{0,M}$ et $\kappa_M\in\mathfrak{K}_{\mathbf{M}}(I_M/\mathbb{Q})$ comme ci-dessus, avec $\gamma_{0,M}\in\mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)\mathbf{M}_h(\mathbb{Q}_p)$. Alors, d'après le calcul des $\psi(\gamma_{0,M},\kappa)$ ci-dessus, $\Psi(\gamma_{0,M},\kappa_M)$ est égal au produit de

$$\Psi^{\infty}(\gamma_{0,M},\kappa_M):=\delta^{1/2}_{\mathbf{P}(\mathbb{Q}_p)}(\gamma_{0,M})\sum_{(\gamma,\delta)}<\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta),s'_M>e(\gamma)e(\delta)O_{\gamma_{0,L}\gamma}(f^{\infty,p}_{\mathbf{M}})O_{\gamma_{0,L}}(\mathbb{1}_{\mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)})TO_{\delta}(\phi_j^{\mathbf{M}_h})$$

(où γ et δ parcourent les mêmes ensembles d'indices qu'avant) et de

$$\Psi_{\infty}(\gamma_{0,M},\kappa_M):=\tau(\mathbf{G})\sum_{\substack{\kappa\in\mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I_M/\mathbb{Q})_e\\ \kappa\longmapsto\kappa_M}}\tau(\mathbf{M}')\tau(\mathbf{H})^{-1}\Delta^{\mathbf{M}}_{\mathbf{M}',s_M,\infty}(\gamma',\gamma_{0,M})^{-1}S\Phi^{\mathbf{H}}_{\mathbf{M}'}(\gamma',f_{\mathbf{H},\infty}).$$

On veut utiliser la proposition 3.3.1 pour calculer $\Psi_{\infty}(\gamma_{0,M},\kappa_M)$, donc il faut vérifier les conditions de cette proposition. Soient $e_1,\dots,e_r,\alpha_1,\dots,\alpha_t:\mathbf{M}\longrightarrow\mathbb{G}_m$ comme dans l'exemple 3.2.8. Comme $\gamma_{0,M}\in\mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)\mathbf{M}_h(\mathbb{Q}_p)$, on a $|e_1(\gamma_{0,M})|_p=\dots=|e_r(\gamma_{0,M})|_p=|\alpha_1(\gamma_{0,M})|_p=\dots=|\alpha_t(\gamma_{0,M})|_p=1$. D'après la remarque 1.7.5 de [M2], la fonction $\gamma_M\longmapsto O_{\gamma_M}((f^{\infty,p})_{\mathbf{M}})$ sur $\mathbf{M}(\mathbb{A}^p_f)$

est à support compact modulo conjugaison. Donc il existe $D \in \mathbb{R}^{+*}$ (dépendant uniquement de $\mathbf{M}$) tel que, pour tout $\gamma_M \in \mathbf{M}(\mathbb{A}_f^p)$ vérifiant $O_{\gamma_M}((f^{\infty,p})_{\mathbf{M}}) \neq 0$, on ait

$$\inf(\inf_{1\leqslant i\leqslant r} |e_i(\gamma_M)^2 c(\gamma_M)|_{\mathbb{A}_f^p}, \inf_{1\leqslant j\leqslant t} |\alpha_j(\gamma_M)c(\gamma_M)|_{\mathbb{A}_f^p}) \geqslant D.$$

On suppose que j est assez grand pour que $p^j D \geqslant 1$. Alors, si $\gamma_{0,M}$ est tel que $\Psi^\infty(\gamma_{0,M},\kappa_M) \neq 0$ (et $\gamma_{0,M} \in \mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)\mathbf{M}_h(\mathbb{Q}_p)$), on a, pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$,

$$|e_i(\gamma_{0,M})^2 c(\gamma_{0,M})|_\infty = |e_i(\gamma_{0,M})^2 c(\gamma_{0,M})|_p^{-1} |e_i(\gamma_{0,M})^2 c(\gamma_{0,M})|_{\mathbb{A}_f^p}^{-1} \leqslant p^{-j} D^{-1} \leqslant 1,$$

et, pour tout $j \in \{1,\dots,t\}$,

$$|\alpha_j(\gamma_{0,M})c(\gamma_{0,M})|_\infty = |\alpha_j(\gamma_{0,M})c(\gamma_{0,M})|_p^{-1} |\alpha_j(\gamma_{0,M})c(\gamma_{0,M})|_{\mathbb{A}_f^p}^{-1} \leqslant p^{-j} D^{-1} \leqslant 1,$$

car $|c(\gamma_{0,M})|_p = p^j$ d'après la proposition 4.1. Donc, d'après la proposition 3.3.1, le lemme 5.3.5 et le lemme 5.2.3, on a

$$\Psi_\infty(\gamma_{0,M},\kappa_M) = 2^{-(r+t)}(n_M^G)\tau(\mathbf{M})e(I_M(\infty))L_M(\gamma_{0,M}) \operatorname{vol}(I_M(\infty)(\mathbb{R})/\mathbf{A}_M(\mathbb{R})^0)^{-1} \mathbb{1}_{c(\gamma_{0,M})>0},$$

où $I_M(\infty)$ est une forme intérieure sur $\mathbb{R}$ de I_M telle que $I_M(\infty)/\mathbf{A}_M$ soit anisotrope.

On pose $I_L = \mathbf{M}_{l,\gamma_{0,L}}$ et $I = \mathbf{M}_{h,\gamma_0}$. Soit $I_L(\infty)$ (resp. $I(\infty)$) une forme intérieure sur $\mathbb{R}$ de I_L (resp. I) qui est anisotrope modulo $\mathbf{A}_{I_L}$ (resp. A_I). D'après [GKM] 7.10 (et le fait que, avec les notations de cet article, $\tau(I_L) = \mathcal{D}(I_L) = 1$), on a

$$\chi(I_L) = e(I_L) \operatorname{vol}(I_L(\infty)(\mathbb{R})/\mathbf{A}_{I_L}(\mathbb{R})^0)^{-1}.$$

Donc $\Psi(\gamma_{0,M},\kappa_M)$ est égal à

$$2^{-(r+t)}(n_M^G)\tau(\mathbf{M})\delta_{\mathbf{P}(\mathbb{Q}_p)}^{1/2}(\gamma_{0,M})L_M(\gamma_{0,M}) \operatorname{vol}^{-1} \mathbb{1}_{c(\gamma_{0,M})>0}$$
$$\sum_{(\gamma,\delta)} < \alpha(\gamma_0;\gamma,\delta), s'_M > e(\gamma)e(\delta)e(I(\infty))O_{\gamma_{0,L}\gamma}(f_{\mathbf{M}}^{\infty,p})O_{\gamma_{0,L}}(\mathbb{1}_{\mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)})TO_\delta(\phi_j^{\mathbf{M}_j}),$$

où on a écrit vol pour $\operatorname{vol}(I(\infty)(\mathbb{R})/\mathbf{A}_I(\mathbb{R})^0)$.

Finalement, on trouve que Tr'_M est égal à

$$\tau(\mathbf{M}_h)\sum_{\gamma_{0,M}} \delta_{\mathbf{P}(\mathbb{Q}_p)}^{1/2}(\gamma_{0,M})\chi(I_L)L_M(\gamma_{0,M}) \operatorname{vol}^{-1} \mathbb{1}_{c(\gamma_0)>0}$$
$$\sum_{\kappa_M}\sum_{(\gamma,\delta)} < \alpha(\gamma_0;\gamma,\delta), s'_M > e(\gamma)e(\delta)e(I(\infty))O_{\gamma_{0,L}\gamma}(f_{\mathbf{M}}^{\infty,p})O_{\gamma_{0,L}}(\mathbb{1}_{\mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)})TO_\delta(\phi_j^{\mathbf{M}}),$$

où les ensembles d'indices sont les mêmes que plus haut (on peut omettre la condition $\gamma_{0,M} \in \mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)\mathbf{M}_h(\mathbb{Q}_p)$, car elle est nécessaire pour que le terme associé à $\gamma_{0,M}$ dans la somme ci-dessus soit non nul). Cette formule résulte des calculs ci-dessus et du fait que $\tau(\mathbf{M}) = \tau(\mathbf{M}_h)$ (car $\tau(\mathbf{M}_l) = 1$) et $c(\gamma_{0,M}) = c(\gamma_0)$. De plus, en utilisant à nouveau le fait que $\mathbf{M}_l$ est isomorphe à un produit direct de groupes $\mathbb{G}_m$ et $\mathbf{GL}_2$, il est facile de voir que, pour tout $\gamma_{0,M}$, $\mathfrak{K}_{\mathbf{M}}(I_M/\mathbb{Q}) = \mathfrak{K}_{\mathbf{M}_h}(I/\mathbb{Q})$. Donc, en appliquant le raisonnement de [K7] §4 à $\mathbf{M}_h$, on trouve que Tr'_M est égal à

$$\sum_{\gamma_{0,L}}\sum_{(\gamma_0;\gamma,\delta)\in C'_{\mathbf{M}_h,j}} \chi(I_L)c(\gamma_0;\gamma,\delta)\delta_{\mathbf{P}(\mathbb{Q}_p)}^{1/2}(\gamma_{0,L}\gamma_0)O_{\gamma_{0,L}\gamma}(f_{\mathbf{M}}^{\infty,p})O_{\gamma_{0,L}}(\mathbb{1}_{\mathbf{M}_l(\mathbb{Z}_p)})TO_\delta(\phi_j^{\mathbf{M}})L_M(\gamma_{0,L}\gamma_0),$$

où $\gamma_{0,L}$ parcourt l'ensemble des classes de conjugaison de $\mathbf{M}_l(\mathbb{Q})$ qui sont semi-simples et elliptiques dans $\mathbf{M}_l(\mathbb{R})$. Ceci est l'expression pour $\operatorname{Tr}_M(f^\infty, j)$ donnée dans 1.2.

□

Comme dans le théorème ci-dessus, soit $\mathbf{M}$ un sous-groupe de Levi cuspidal standard de $\mathbf{G}$. Soit $\gamma_M \in \mathbf{M}(\mathbb{Q})$ semi-simple et elliptique dans $\mathbf{M}(\mathbb{R})$. On note $I_M = \mathbf{M}_{\gamma_M}$, et on utilise la notation $\mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I_M/\mathbb{Q})_e$ de la preuve du théorème. Rappelons qu'on a défini dans 3.3 un sous-ensemble $\mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I_M/\mathbb{R})_e$ de $\mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I_M/\mathbb{R})$.

Lemme 5.3.5. *Le morphisme canonique $\mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I_M/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I_M/\mathbb{R})$ (obtenu en restreignant l'inclusion $(Z(\widehat{I_M})/Z(\widehat{\mathbf{G}}))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})} \subset (Z(\widehat{I_M})/Z(\widehat{\mathbf{G}}))^{\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})}$) induit une bijection $\mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I_M/\mathbb{Q})_e \xrightarrow{\sim} \mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I_M/\mathbb{R})_e$.*

Ce lemme résulte facilement de la description explicite des $\mathbf{G}$-triplets endoscopiques elliptiques de $\mathbf{M}$ (sur un corps local ou global F) dans le lemme 2.2.3 et de la remarque 2.2.5 (cf le début de 3.3 pour plus de détails sur la manière d'en déduire la description de $\mathfrak{K}_{\mathbf{G}}(I_M/F)_e$ dans le cas $F = \mathbb{R}$; le point est que cette description ne dépend pas de F).

Lemme 5.3.6. *(cf [K8] 7.10 et lemme 7.6) On fixe une place v de $\mathbb{Q}$. Soient $\mathbf{M}$ un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$, $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0}) \in \mathcal{E}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$ et $(\mathbf{H}, s, \eta_0)$ l'image de $(\mathbf{M}', s_M, \eta_{M,0})$ dans $\mathcal{E}(\mathbf{G})$. Comme le lemme 2.2.2, on identifie $\mathbf{M}'$ à un sous-groupe de Levi de $\mathbf{H}$. On choisit des prolongements compatibles $\eta : {}^L\mathbf{H} \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$ et $\eta_M : {}^L\mathbf{M}' \longrightarrow {}^L\mathbf{M}$ de η_0 et $\eta_{M,0}$, et on normalise les facteurs de transfert comme dans 5.1.*

(i) Soit $f \in C_c(\mathbf{G}(\mathbb{Q}_v))$. Alors, pour tout $\gamma \in \mathbf{M}(\mathbb{Q}_v)$ semi-simple et $\mathbf{G}$-régulier, on a

$$SO_\gamma(f_{\mathbf{M}}) = |D_M^G(\gamma)|_v^{1/2} SO_\gamma(f).$$

(On rappelle que $D_M^G(\gamma) = \det(1 - \mathrm{Ad}(\gamma), Lie(\mathbf{G})/Lie(\mathbf{M})$.)

(ii) Soit $f \in C_c^\infty(\mathbf{G}(\mathbb{Q}_v))$, et soit $f^{\mathbf{H}} \in C_c^\infty(\mathbf{H}(\mathbb{Q}_v))$ un transfert de f. Alors, pour tout $\gamma_H \in \mathbf{M}'(\mathbb{Q}_v)$ semi-simple $(\mathbf{M}, \mathbf{M}')$-régulier, on a

$$SO_{\gamma_H}((f^{\mathbf{H}})_{\mathbf{M}'}) = \sum_\gamma \Delta^{\mathbf{M}}_{\mathbf{M}', s_M}(\gamma_H, \gamma) e(\mathbf{M}_\gamma) O_\gamma(f_{\mathbf{M}}),$$

où γ parcourt l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples de $\mathbf{M}(\mathbb{Q}_v)$ qui sont des images de γ_H.

Le lemme ci-dessus est le lemme 6.3.3 de [M2], et la preuve de Kottwitz est rappelée dans [M2] loc. cit.

6. Applications

Dans cette section, on donne une application de la formule des points fixes stabilisée au calcul des composantes isotypiques de la cohomologie d'intersection, dans le cas où $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_4$ ou $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_6$. On a choisi de se restreindre à ces cas car la stabilisation du côté géométrique de la formule des traces est alors inconditionnelle (et triviale), cf la proposition 5.2.1. Si l'on accepte d'utiliser les résultats de [K8] (et leur extension au cas où $\mathbf{G}^{der}$ n'est pas simplement connexe), alors les résultats de cette section ont des analogues (plus compliqués) pour $\mathbf{GSp}_{2n}$ (voir la section 7.1 de [M2]). [5] Notons cependant qu'on ne peut pas utiliser la récurrence sur les groupes endoscopiques de la section 7.2 de [M2] dans le cas des groupes symplectiques.

On suppose donc que $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_4$ ou $\mathbf{GSp}_6$. Si $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_4$, on note $\mathbf{H} = \mathbf{GSO}_4$; si $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_6$, on note $\mathbf{H} = \mathbf{G}(\mathbf{Sp}_2 \times \mathbf{SO}_4)$. Alors, d'après la proposition 2.1.1, $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont les seuls groupes endoscopiques elliptiques de $\mathbf{G}$ qui apparaissent dans la stabilisation de la formule des points fixes.

5. Bien sûr, si on admet les conjectures d'Arthur sur le spectre discret des groupes $\mathbf{G}(\mathbf{Sp}_{2n_1} \times \mathbf{SO}_{2n_2})$, alors on peut faire encore mieux, comme cela est expliqué dans les sections 8 à 10 de [K7].

On a $\iota(\mathbf{G},\mathbf{H})=\frac{1}{4}$ d'après les calculs de 2.1. On note $\eta : {}^L\mathbf{H}\longrightarrow {}^L\mathbf{G}$ le prolongement évident du morphisme η_0 de 2.1.

Soit K un sous-groupe compact ouvert net de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$. On fixe, comme dans 1.2, une représentation algébrique irréductible V de $\mathbf{G}$, un nombre premier ℓ et un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell\simeq\mathbb{C}$. On note $\mathcal{H}_K=\mathcal{H}(\mathbf{G}(\mathbb{A}_f),\mathrm{K}):=C_c^\infty(\mathrm{K}\setminus\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K})$, et on définit un objet W_ℓ du groupe de Grothendieck des représentations de $\mathcal{H}_K\times\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie par

$$W_\ell=\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i[\mathrm{H}^i(\overline{S}^{\mathrm{K}}_{\overline{\mathbb{Q}}},IC^{\mathrm{K}}V_{\overline{\mathbb{Q}}})].$$

On a la décomposition isotypique de $W_\ell\otimes_{\mathbb{Q}_\ell}\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ en tant que $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$-module,

$$W_\ell\otimes_{\mathbb{Q}_\ell}\overline{\mathbb{Q}}_\ell=\sum_{\pi_f}W_\ell(\pi_f)\otimes\pi_f^{\mathrm{K}},$$

où π_f parcourt l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ telles que $\pi_f^{\mathrm{K}}\neq 0$ et où les $W_\ell(\pi_f)$ sont des représentations virtuelles de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie. Comme il n'existe qu'un nombre fini de π_f telles que $W_\ell(\pi_f)\neq 0$, les représentations virtuelles $W_\ell(\pi_f)$ sont définies sur une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$.

Notation 6.1. Soient $\mathbf{G}'$ un groupe algébrique réductif connexe sur $\mathbb{Q}$ et ξ un quasi-caractère sur $\mathbf{A}_{G'}(\mathbb{R})^0$. On note $\Pi(\mathbf{G}'(\mathbb{A}),\xi)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations admissibles irréductibles de $\mathbf{G}'(\mathbb{A})$ sur lesquelles $\mathbf{A}_{G'}(\mathbb{R})^0$ agit par ξ. Pour toute $\pi\in\Pi(\mathbf{G}'(\mathbb{A}),\xi)$, on note $m_{disc}(\pi)$ la multiplicité avec laquelle π apparaît comme facteur direct dans $L^2(\mathbf{G}'(\mathbb{Q})\setminus\mathbf{G}'(\mathbb{A}),\xi)$ (cf [A], §2). On note $\Pi_{disc}(\mathbf{G}'(\mathbb{A}),\xi)$ l'ensemble des $\pi\in\Pi(\mathbf{G}'(\mathbb{A}),\xi)$ telles que $m_{disc}(\pi)\neq 0$.

Soit ξ_G le quasi-caractère par lequel le groupe $\mathbf{A}_G(\mathbb{R})^0$ agit sur la contragrédiente de V. On considère le morphisme

$$\varphi : W_{\mathbb{R}}\xrightarrow{j}{}^L\mathbf{H}_{\mathbb{R}}\xrightarrow{\eta_\infty}{}^L\mathbf{G}_{\mathbb{R}}\xrightarrow{p}{}^L(\mathbf{A}_G)_{\mathbb{R}},$$

où j est l'inclusion évidente, η_∞ est induit par η et p est le dual de l'inclusion $\mathbf{A}_G\longrightarrow\mathbf{G}$. Le morphisme φ est le paramètre de Langlands d'un quasi-caractère sur $\mathbf{A}_G(\mathbb{R})$, et on note χ la restriction à $\mathbf{A}_G(\mathbb{R})^0$ de ce quasi-caractère. Comme $\mathbf{A}_H=\mathbf{A}_G$, on peut définir un quasi-caractère ξ_H sur $\mathbf{A}_H(\mathbb{R})^0$ par

$$\xi_H=\xi_G\chi^{-1}.$$

Ce quasi-caractère vérifie la propriété suivante : si $\varphi_H : W_{\mathbb{R}}\longrightarrow{}^L\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ est un paramètre de Langlands correspondant à un L-paquet de représentations de $\mathbf{H}(\mathbb{R})$ de caractère central ξ_H sur $\mathbf{A}_H(\mathbb{R})^0$, alors $\eta_\infty\circ\varphi_H : W_{\mathbb{R}}\longrightarrow{}^L\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ correspond à un L-paquet de représentations de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ de caractère central ξ_G sur $\mathbf{A}_G(\mathbb{R})^0$. (Cette construction est celle de [K8] 5.5).

On note $\Pi_G=\Pi_{disc}(\mathbf{G}(\mathbb{A}),\xi_G)$ et $\Pi_H=\Pi_{disc}(\mathbf{H}(\mathbb{A}),\xi_H)$.

Soit M_H l'ensemble des classes de $\mathbf{H}(\mathbb{Q})$-conjugaison de cocaractères $\mu_H:\mathbb{G}_m\longrightarrow\mathbf{H}$ tels que μ_H, vu comme un cocaractère de $\mathbf{G}$ grâce à l'isomorphisme évident entre le tore diagonal de $\mathbf{H}$ et celui de $\mathbf{G}$, soit conjugué (par $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$) au cocaractère $\mu:\mathbb{G}_m\longrightarrow\mathbf{G}$ de 1.1. Pour tout $\mu_H\in M_H$, on note $r_{-\mu_H}$ la représentation de ${}^L\mathbf{H}$ associée à $-\mu_H$ par Kottwitz (cf [K2] 2.1.2, [K7] p 193) ; la représentation $r_{-\mu_H}$ est triviale sur $W_{\mathbb{Q}}$, et sa restriction à $\widehat{\mathbf{H}}$ est algébrique de plus haut poids $-\mu_H$. On a de même une représentation $r_{-\mu}$ de ${}^L\mathbf{G}$ associée à $-\mu$. On va définir une fonction $\varepsilon:M_H\longrightarrow\{\pm1\}$. Si $\mathbf{G}=\mathbf{GSp}_4$, alors un système de représentants de M_H est $z\longmapsto diag(z,z,1,1)$ et $z\longmapsto diag(z,1,z,1)$; on envoie le premier cocaractère sur 1, et le deuxième sur -1. Si $\mathbf{G}=\mathbf{GSp}_6$, alors un système de représentants de M_H est $z\longmapsto diag(z,z,z,1,1,1)$, $z\longmapsto diag(z,1,1,z,z,1)$, $z\longmapsto diag(z,1,z,1,z,1)$ et $z\longmapsto diag(z,z,1,z,1,1)$; on envoie les deux premiers cocaractères sur 1 et les deux derniers sur -1.

Comme dans 5.3, on associe à V des fonctions cuspidales stables $f_{\mathbf{G},\infty} = f_\infty \in C^\infty(\mathbf{G}(\mathbb{R}))$ et $f_{\mathbf{H},\infty} \in C^\infty(\mathbf{H}(\mathbb{R}))$.

Pour toute représentation irréductible admissible π_f de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, on note

$$c_{\mathbf{G}}(\pi_f) = \sum_{\substack{\pi_\infty \in \Pi(\mathbf{G}(\mathbb{R})),\\ \pi_f \otimes \pi_\infty \in \Pi_{\mathbf{G}}}} m_{disc}(\pi_f \otimes \pi_\infty) \operatorname{Tr}(\pi_\infty(f_\infty))$$

(cette somme n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, car il n'existe qu'un nombre fini de $\pi_\infty \in \Pi(\mathbf{G}(\mathbb{R}))$ telles que $\operatorname{Tr}(\pi_\infty(f_\infty)) \neq 0$). Pour toute représentation irréductible admissible $\pi_{H,f}$ de $\mathbf{H}(\mathbb{A}_f)$, on note

$$c_{\mathbf{H}}(\pi_{H,f}) = \sum_{\substack{\pi_{H,\infty} \in \Pi(\mathbf{H}(\mathbb{R})),\\ \pi_{H,f} \otimes \pi_{H,\infty} \in \Pi_{\mathbf{H}}}} m_{disc}(\pi_{H,f} \otimes \pi_{H,\infty}) \operatorname{Tr}(\pi_{H,\infty}(f_{\mathbf{H},\infty}))$$

(cette somme est finie pour la même raison que dans le cas de $c_{\mathbf{G}}(\pi_f)$).

Soit $\pi_f = \bigotimes\limits_p \pi_p$ une représentation irréductible admissible de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$. Alors on note $R_H(\pi_f)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles admissibles $\pi_H = \bigotimes\limits_p \pi_{H,p}$ de $\mathbf{H}(\mathbb{A}_f)$ telles que, pour presque tout nombre premier p où π_f et $\pi_{H,f}$ sont non ramifiées, le morphisme $\eta : {}^L\mathbf{H} \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$ envoie un paramètre de Langlands de $\pi_{H,p}$ sur un paramètre de Langlands de π_p.

Soit p un nombre premier. On a fixé des plongements $\mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$, qui déterminent un morphisme $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. On note $Frob_p \in \operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ un relèvement du Frobenius géométrique, et on utilise la même notation pour son image dans $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Si $\mathbf{G}'$ est un groupe réductif non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$ et π_p est une représentation non ramifiée de $\mathbf{G}'(\mathbb{Q}_p)$, on note $\varphi_{\pi_p} : W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow {}^L\mathbf{G}'$ un paramètre de Langlands de π_p.

Théorème 6.1.1. *Soit π_f une représentation irréductible admissible de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ telle que $\pi_f^{\mathrm{K}} \neq 0$. Alors il existe une fonction $f^\infty \in C_c^\infty(\mathbf{G}(\mathbb{A}_f))$ telle que, pour presque tout nombre premier p et pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on ait*

$$\operatorname{Tr}(Frob_p^m, W_\ell(\pi_f)) = p^{md/2} c_{\mathbf{G}}(\pi_f) \dim(\pi_f^{\mathrm{K}}) \operatorname{Tr}(r_{-\mu} \circ \varphi_{\pi_p}(Frob_p^m))$$
$$+\iota(\mathbf{G},\mathbf{H}) p^{md/2} \sum_{\pi_{H,f} \in R_H(\pi_f)} c_{\mathbf{H}}(\pi_{H,f}) \operatorname{Tr}(\pi_{H,f}((f^\infty)^{\mathbf{H}})) \sum_{\mu_H \in M_H} \varepsilon(\mu_H) \operatorname{Tr}(r_{-\mu_H} \circ \varphi_{\pi_{H,p}}(Frob_p^m)),$$

où $(f^\infty)^{\mathbf{H}}$ est un transfert de f^∞ et $d = \dim S^{\mathrm{K}}$ (donc $d = 3$ si $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_4$ et $d = 6$ si $\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_6$).

On pourrait facilement déduire de ce théorème des résultats sur la valeur absolue des valeurs propres de Hecke de π_f en presque toute place, comme dans le théorème 7.5 de [Lau1] ou la section 6.2 de [M2]. Nous ne le ferons pas ici.

Démonstration. Il suffit de prouver l'égalité du théorème pour m assez grand (où la signification de "assez grand" peut dépendre de p).

Pour tout ensemble fini S de nombres premiers, on note $\mathbb{A}_S = \prod\limits_{p \in S} \mathbb{Q}_p$, $\mathbb{A}_f^S = \prod\limits_{p \notin S}{}' \mathbb{Q}_p$ et $\mathrm{K}^S = \prod\limits_{p \notin S} \mathbf{G}(\mathbb{Z}_p)$. Pour tout $\mathrm{K}_S \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_S)$, on note $\mathcal{H}(\mathbf{G}(\mathbb{A}_S), \mathrm{K}_S)$ et $\mathcal{H}(\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^S), \mathrm{K}^S)$ les algèbres de Hecke des fonctions à support compact sur $\mathbf{G}(\mathbb{A}_S)$ (resp. $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^S)$) qui sont bi-invariantes par K_S (par K^S). Si $\pi'_f = \bigotimes{}' \pi'_p$ est une représentation irréductible admissible de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, on note $\pi'_S = \bigotimes\limits_{p \in S} \pi'_p$ et $\pi'^S = \bigotimes\limits_{p \notin S}{}' \pi'_p$.

Notons R' l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles admissibles π'_f de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ telles que $\pi'_f \not\simeq \pi_f$, que $(\pi'_f)^{\mathrm{K}} \neq 0$, et que $W_\ell(\pi'_f) \neq 0$ ou $c_{\mathbf{G}}(\pi'_f) \neq 0$. Alors R' est fini, donc il existe une fonction h dans $\mathcal{H}_{\mathrm{K}}$ telle que $\mathrm{Tr}(\pi_f(h)) = 1$ et $\mathrm{Tr}(\pi'_f(h)) = 0$ pour toute $\pi'_f \in R'$.

Soit T un ensemble fini de nombres premiers tel que $\ell \in T$, que toutes les représentations de R' soient non ramifiées en dehors de T, que $\mathrm{K} = \mathrm{K}_T \mathrm{K}^T$ avec $\mathrm{K}_T \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_T)$ et que $h = h_T \mathbb{1}_{\mathrm{K}^T}$ avec $h_T \in \mathcal{H}(\mathbf{G}(\mathbb{A}_T), \mathrm{K}_T)$. Alors, pour toute fonction g^T de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^T), \mathrm{K}^T)$, on a $\mathrm{Tr}(\pi_f(h_T g^T)) = \mathrm{Tr}(\pi^T(g^T))$ et $\mathrm{Tr}(\pi'_f(h_T g^T)) = 0$ si $\pi'_f \in R'$.

Soit R'_H l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles admissibles ρ_f de $\mathbf{H}(\mathbb{A}_f)$ telles que $\rho_f \not\in R_H(\pi_f)$ et que $c_{\mathbf{H}}(\rho_f) \neq 0$. Alors R'_H est fini, donc il existe $g^T \in \mathcal{H}(\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^T), \mathrm{K}^T)$ telle que $\mathrm{Tr}(\pi^T(g^T)) = 1$ et, pour tout $\rho_f \in R'_H$, si k^T est la fonction sur $\mathbf{H}(\mathbb{A}_f^T)$ obtenue par transfert non ramifié à partir de g^T en utilisant le morphisme η, on ait $\mathrm{Tr}(\rho^T(k^T)) = 0$.

Soit $S \supset T$ un ensemble fini de nombres premiers tel que $g^T = g_{S-T} \mathbb{1}_{\mathrm{K}^S}$, avec g_{S-T} une fonction sur $\mathbf{G}(\mathbb{A}_{S-T})$. On pose

$$f^\infty = h_T g^T.$$

Soit $p \not\in S \cup \{\ell\}$ un nombre premier. Alors $f^\infty = f^{\infty,p} \mathbb{1}_{\mathbf{G}(\mathbb{Z}_p)}$, donc on peut, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, associer à f^∞ des fonctions $f_{\mathbf{G}}^{(m)} = f_{\mathbf{G},p}^{(m)} \prod\limits_{v \neq p} f_{\mathbf{G},v} \in C^\infty(\mathbf{G}(\mathbb{A}))$ et $f_{\mathbf{H}}^{(m)} = f_{\mathbf{H},p}^{(m)} \prod\limits_{v \neq p} f_{\mathbf{H},v} \in C^\infty(\mathbf{H}(\mathbb{A}))$ comme dans 5.3. On remarque que $\prod\limits_{v \neq \infty,p} f_{\mathbf{G},v} = f^{\infty,p}$.

D'après le corollaire 5.3.3 et la proposition 5.2.1, pour m assez grand,

$$\mathrm{Tr}(Frob_p^m \times f^\infty, W_\ell) = T^G(f_{\mathbf{G}}^{(m)}) + \iota(\mathbf{G}, H) T^H(f_{\mathbf{H}}^{(m)}).$$

D'après les calculs de [A] p 267-268, on a

$$T^G(f_{\mathbf{G}}^{(m)}) = \sum_{\rho \in \Pi_{\mathbf{G}}} m_{disc}(\rho) \,\mathrm{Tr}(\rho(f^{(m)}))$$

$$T^H(f_{\mathbf{H}}^{(m)}) = \sum_{\rho_H \in \Pi_{\mathbf{H}}} m_{disc}(\rho_H) \,\mathrm{Tr}(\rho_H(f_{\mathbf{H}}^{(m)})).$$

Soit $\rho_H = \rho_H^{\infty,p} \otimes \rho_{H,p} \otimes \rho_{H,\infty} = \rho_{H,f} \otimes \rho_{H,\infty} \in \Pi_{\mathbf{H}}$. On a

$$\mathrm{Tr}(\rho_H(f_{\mathbf{H}}^{(m)})) = \mathrm{Tr}(\rho_H^{\infty,p}(f_{\mathbf{H}}^{\infty,p})) \,\mathrm{Tr}(\rho_{H,p}(f_{\mathbf{H},p}^{(m)})) \,\mathrm{Tr}(\rho_{H,\infty}(f_{\mathbf{H},\infty})).$$

Comme $f_{H,p}^{(m)} \in \mathcal{H}(\mathbf{H}(\mathbb{Q}_p), \mathbf{H}(\mathbb{Z}_p))$, on voit que la trace ci-dessus s'annule si ρ_H est ramifiée en p. Supposons que ρ_H est non ramifiée en p. Alors on a

$$\mathrm{Tr}(\rho_H^{\infty,p}(f_{\mathbf{H}}^{\infty,p})) = \mathrm{Tr}(\rho_{H,f}(f_{\mathbf{H}}^{\infty,p} \mathbb{1}_{\mathbf{H}(\mathbb{Z}_p)})) = \mathrm{Tr}(\rho_{H,f}((f^\infty)^{\mathbf{H}}))$$

(car $\rho_{H,p}^{\mathbf{H}(\mathbb{Z}_p)}$ est de dimension 1), et, en utilisant le calcul de $f_{\mathbf{H},p}^{(m)}$ dans la preuve de la proposition 4.1 (où cette fonction est notée $f^{\mathbf{H}}$), on voit que

$$\mathrm{Tr}(\rho_{H,p}(f_{\mathbf{H},p}^{(m)})) = p^{md/2} \sum_{\mu_H \in M_H} \varepsilon(\mu_H) \,\mathrm{Tr}(r_{-\mu_H} \circ \varphi_{\rho_{H,p}}(Frob_p^m)).$$

Enfin, d'après le choix de f^∞, on a

$$c_{\mathbf{H}}(\rho_{H,f}) \,\mathrm{Tr}(\rho_{H,f}((f^\infty)^{\mathbf{H}})) = 0$$

si $\rho_{H,f} \not\in R_H(\pi_f)$.

De même, pour toute $\rho = \rho_f \otimes \rho_\infty \in \Pi_{\mathbf{G}}$, on a $\mathrm{Tr}(\rho(f_{\mathbf{G}}^{(m)})) = 0$ si ρ est ramifiée en p et, si ρ est non ramifiée en p, alors

$$c_{\mathbf{G}}(\rho_f) \,\mathrm{Tr}(\rho_f((f_{\mathbf{G}}^{(m)})^\infty)) = c_{\mathbf{G}}(\rho_f) \,\mathrm{Tr}(\rho_f(f^\infty)) = 0$$

si $\rho_f \not\simeq \pi_f$ et

$$\mathrm{Tr}(\rho(f_{\mathbf{G}}^{(m)})) = \dim(\pi_f^{\mathrm{K}}) \,\mathrm{Tr}(\rho_\infty(f_\infty)) p^{md/2} \,\mathrm{Tr}(r_{-\mu} \circ \varphi_{\pi_p}(Frob_p^m))$$

si $\rho_f \simeq \pi_f$.

Le théorème résulte immédiatement de ces calculs.

□

En appliquant les méthodes de la preuve ci-dessus à toute la cohomologie d'intersection, on obtient la proposition suivante :

Proposition 6.2. *Pour tout nombre premier p tel que* $\mathrm{K} = \mathbf{G}(\mathbb{Z}_p)\mathrm{K}^p$ *avec* $\mathrm{K}^p \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$, *on a*

$$\log L_p(s, \mathrm{H}^*(\overline{S}_{\overline{\mathbb{Q}}}^{\mathrm{K}}, IC^{\mathrm{K}} V_{\overline{\mathbb{Q}}})) = \sum_{\pi_f} c_{\mathbf{G}}(\pi_f) \dim(\pi_f^{\mathrm{K}}) \log L(s - \frac{d}{2}, \pi_p, r_{-\mu})$$

$$+ \sum_{\pi_{H,f}} c_{\mathbf{H}}(\pi_{H,f}) \,\mathrm{Tr}(\pi_{H,f}((\mathbb{1}_{\mathrm{K}})^{\mathbf{H}})) \sum_{\mu_H \in M_H} \varepsilon(\mu_H) \log L(s - \frac{d}{2}, \pi_{H,p}, r_{-\mu_H}),$$

où la première (resp. deuxième) somme est sur les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles admissibles π_f (resp. $\pi_{H,f}$) de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ (resp. $\mathbf{H}(\mathbb{A}_f)$), et $(\mathbb{1}_{\mathrm{K}})^{\mathbf{H}})$ est un transfert de $\mathbb{1}_{\mathrm{K}}$.

7. Appendice : lemmes combinatoires

Cet appendice contient les lemmes combinatoires qui sont utilisés dans la preuve de la proposition 3.3.1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On fait agir $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{R}^n$ par $(\sigma, (\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \longmapsto (\lambda_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \lambda_{\sigma^{-1}(n)})$. On note τ l'élément de $\mathfrak{S}_n$ qui envoie $i \in \{1, \dots, n-1\}$ sur $i+1$ et n sur 1.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. On dit que $\lambda > 0$ si $\lambda_1 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_1 + \dots + \lambda_n > 0$, et on note $\mathfrak{S}(\lambda) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(\lambda) > 0\}$.

Soient I un ensemble fini et $\lambda = (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$. Pour tout $J \subset I$, on note $s_J(\lambda) = \sum_{i \in J} \lambda_i$. On note $\delta(\lambda)$ le minimum des $s_J(\lambda)/|J|$, pour J parcourant l'ensemble des sous-ensembles de I tels que $s_J(\lambda) > 0$ (s'il n'existe pas de tel J, alors $\delta(\lambda) = -\infty$) ; si $\delta(\lambda) > 0$, on note $N(\lambda)$ le minimum des $|J|$, pour $J \subset I$ tel que $s_J(\lambda)/|J| = \delta(\lambda)$.

On note $\mathcal{P}(I)$ l'ensemble des partitions de I, et $\mathcal{P}_{ord}(I)$ l'ensemble des partitions ordonnées de I. On a une application évidente d'oubli de l'ordre oub : $\mathcal{P}_{ord}(I) \longrightarrow \mathcal{P}(I)$, et une partition $p \in \mathcal{P}(I)$ a $|p|!$ antécédents par cette application, où $|p|$ est le nombre d'ensembles composant p. Pour $P \in \mathcal{P}_{ord}(I)$, on note $|P| = |\,\mathrm{oub}(P)|$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}^k(I)$ l'ensemble des partitions de $\mathcal{P}(I)$ qui ont exactement $2k$ ou $2k+1$ ensembles de cardinal impair, et $\mathcal{P}^k_{ord}(I) = \mathrm{oub}^{-1}(\mathcal{P}^k(I))$. On note $\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(I)$ l'ensemble des partitions de $\mathcal{P}^0(I)$ dont tous les ensembles sont de cardinal $\leqslant 2$ (donc, si $p \in \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(I)$, tous les ensembles de p sont de cardinal 2, sauf peut-être un qui est de cardinal 1). Enfin, on note $\mathcal{D}(I)$ l'ensemble des couples (I_1, I_2), où I_1 et I_2 sont des sous-ensembles disjoints (éventuellement vides) de I tels que $I = I_1 \cup I_2$. Si $I = \{1, \dots, n\}$, on note $\mathcal{P}(I) = \mathcal{P}(n)$, etc.

Soit J un sous-ensemble de I. Si P (resp. p) est une partition ordonnée (resp. une partition) de I, on note $P \cap J$ (resp. $p \cap J$) la partition ordonnée (resp. la partition) de J que l'on obtient en intersectant les ensembles de P (resp. p) avec J et en omettant les intersections vides.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P = (I_1, \dots, I_k) \in \mathcal{P}_{ord}(n)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on note $n_i = |I_i|$. Il existe une unique permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que, pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, la restriction de σ^{-1} à $\{n_1 + \dots + n_i + 1, \dots, n_1 + \dots + n_{i+1}\}$ soit croissante, et $\sigma^{-1}(\{n_1 + \dots + n_i + 1, \dots, n_1 + \dots + n_{i+1}\}) =$

I_{i+1}. On note cette permutation σ_P, et on pose $\varepsilon(P) = sgn(\sigma_P)$ (où $sgn : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{\pm 1\}$ est le morphisme signature). Si I est un ensemble fini totalement ordonné et $P \in \mathcal{P}_{ord}(I)$, on utilise l'ordre sur I pour définir $\varepsilon(P)$. On remarque de plus que, si $p \in \mathcal{P}^0(I)$, alors la restriction à $\mathrm{oub}^{-1}(p)$ de l'application $\varepsilon : \mathcal{P}_{ord}(I) \longrightarrow \{\pm 1\}$ est constante ; on note $\varepsilon(p)$ sa valeur. Si $(J,K) \in \mathcal{D}(I)$, on peut lui associer une permutation $\sigma_{(J,K)}$ de la même façon (le fait que J et K puissent être vides n'a aucune importance pour cette construction) ; on note $\varepsilon(J,K) = sgn(\sigma_{(J,K)})$.

Soit à nouveau I un ensemble fini quelconque. Pour toute $p = \{I_\alpha, \alpha \in A\} \in \mathcal{P}(I)$, on pose

$$\varepsilon'(p) = (-1)^{\frac{1}{2}\sum_{\alpha \in A} |I_\alpha|(|I_\alpha|-1)}.$$

Si $P \in \mathcal{P}_{ord}(I)$, on note $\varepsilon'(P) = \varepsilon'(\mathrm{oub}(P))$. On remarque que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application ε' est constante sur $\mathcal{P}^k(I)$, de valeur $(-1)^{m-k}$, où m est la valeur entière de $n/2$. [6]

Soient I^+, I^- deux sous-ensembles disjoints (éventuellement vides) de I. Si $P \in \mathcal{P}_{ord}(I)$, on note $P^+ = P \cap I^+$ et $P^- = P \cap I^-$. On suppose que I est totalement ordonné, et on munit I^+ et I^- des ordres hérités de l'ordre sur I. On peut alors définir, pour $P \in \mathcal{P}_{ord}(I)$, des signes $\varepsilon(P^+)$ et $\varepsilon(P^-)$.

Soit $\lambda = (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$. Pour toute $P = (I_1, \dots, I_k) \in \mathcal{P}_{ord}(I)$, on note $\lambda_P = (s_{I_1}(\lambda), \dots, s_{I_k}(\lambda)) \in \mathbb{R}^k$. On note

$$\mathcal{P}_{ord}(\lambda) = \{P = (I_1, \dots, I_k) \in \mathcal{P}_{ord}(I) | \lambda_P > 0\}$$

$$\mathcal{P}(\lambda) = \{p = \{I_\alpha, \alpha \in A\} \in \mathcal{P}(I) | \forall \alpha \in A, s_{I_\alpha}(\lambda) > 0\}.$$

On note $\mathcal{P}^0_{ord}(\lambda) = \mathcal{P}_{ord}(\lambda) \cap \mathcal{P}^0_{ord}(I)$ et $\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda) = \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(I) \cap \mathcal{P}(\lambda)$.

On définit des fonctions $c_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $c_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ par les formules suivantes :

$$c_1(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

$$c_2(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a+b \leqslant 0 \text{ ou } a \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } a > 0 \text{ et } b > 0 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On suppose que I est muni d'un ordre total (par exemple, $I \subset \{1, \dots, n\}$, avec l'ordre habituel sur $\{1, \dots, n\}$). Soit $p = \{I_\alpha, \alpha \in A\} \in \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(I)$. Soit $\alpha \in A$. Si I_α a un seul élément, on écrit $I_\alpha = \{i\}$ et on pose $c_{I_\alpha} = c_1(\lambda_i)$; si I_α a deux éléments, on écrit $I_\alpha = \{i_1, i_2\}$ avec $i_1 < i_2$ et on pose $c_{I_\alpha}(\lambda) = c_2(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2})$. On note

$$c(p, \lambda) = \prod_{\alpha \in A} c_{I_\alpha}(\lambda)$$

(bien sûr, on a $c(p,\lambda) = 0$ si $p \notin \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda)$).

Soient $n, m \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}(n,m)$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(n+2m)$ formé des partitions p de $\{1, \dots, n+2m\}$ telles que, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $n+2i-1$ et $n+2i$ soient dans le même ensemble de p. On note $\mathcal{P}_{ord}(n,m) = \mathrm{oub}^{-1}(\mathcal{P}(n,m))$. Si $\lambda \in \mathbb{R}^{n+2m}$, on note $\mathcal{P}_{ord}(n,m,\lambda) = \mathcal{P}_{ord}(n,m) \cap \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$.

Proposition 7.1. *Soient R un anneau commutatif et I un ensemble fini totalement ordonné. On se donne, pour tout sous-ensemble I' de I, des fonctions $a_{I'}, b_{I'} : \mathcal{D}(I') \longrightarrow R$ et $c_{I'}, d_{I'} : \mathcal{P}_{ord}(I') \longrightarrow R$ vérifiant la condition suivante : pour tous $P = (I_1, \dots, I_r) \in \mathcal{P}_{ord}(I')$ et $(J,K) \in \mathcal{D}(I')$ tels qu'il existe $k \in \{1, \dots, r\}$ avec $J = I_1 \cup \dots \cup I_k$, on a*

$$c_{I'}(P) = a_{I'}(J,K) c_J(P \cap J) c_K(P \cap K)$$

$$d_{I'}(P) = b_{I'}(J,K) d_J(P \cap J) d_K(P \cap K).$$

6. Je remercie le referee qui m'a signalé ce fait utile.

Soient $\lambda=(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{R}^I$ et $(I^+,I^-)\in\mathcal{D}(I)$. On note $\lambda^+=(\lambda_i)_{i\in I^+}\in\mathbb{R}^{I^+}$ et $\lambda^-=(\lambda_i)_{i\in I^-}\in\mathbb{R}^{I^-}$. Alors

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda)}(-1)^{|P|}c_{I^+}(P\cap I^+)d_{I^-}(P\cap I^-)=\sum_{P^+\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda^+)}(-1)^{|P^+|}c_{I^+}(P^+)\sum_{P^-\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda^-)}(-1)^{|P^-|}d_{I^-}(P^-).$$

Exemple 7.2. Donnons des exemples de fonctions $a_{I'}$ et $c_{I'}$ vérifiant la condition de la proposition ci-dessus.

(1) $a_{I'}=1$ et $c_{I'}=1$.
(2) $a_{I'}=1$ et $c_{I'}$ égale à la fonction $\mathcal{P}_{ord}(I')\longrightarrow\mathbb{Z}$, $P\longmapsto\varepsilon'(P)$.
(3) $a_{I'}$ égale à la fonction $\mathcal{D}(I')\longrightarrow\mathbb{Z}$, $(J,K)\longmapsto\varepsilon(J,K)$, et $c_{I'}$ égale à la fonction $\mathcal{P}_{ord}(I')\longrightarrow\mathbb{Z}$, $P\longmapsto\varepsilon(P)$.
(4) $a_{I'}$ égale à la fonction $\mathcal{D}(I')\longrightarrow\mathbb{Z}$, $(J,K)\longmapsto\varepsilon(J,K)$, et $c_{I'}$ égale à la fonction $\mathcal{P}_{ord}(I')\longrightarrow\mathbb{Z}$, $P\longmapsto\varepsilon(P)\varepsilon'(P)$.
(5) En général, il est clair que, si l'on a des fonctions $a_{I'},b_{I'},c_{I'},d_{I'}$ comme dans la proposition ci-dessus, alors les fonctions $a_{I'}b_{I'}$ et $c_{I'}d_{I'}$ vérifient la condition de cette proposition.
(6) Soient $a_{I'},b_{I'},c_{I'},d_{I'}$ comme dans la proposition ci-dessus. Soient I^+,I^- deux sous-ensembles disjoints de I. Pour tout sous-ensemble I' de I, on définit des fonctions $ab_{I'}:\mathcal{D}(I')\longrightarrow R$ et $cd_{I'}:\mathcal{P}_{ord}(I')\longrightarrow R$ par les formules suivantes : pour tous $(J,K)\in\mathcal{D}(I')$ et $P\in\mathcal{P}_{ord}(I')$,
$$ab_{I'}(J,K)=a_{I'\cap I^+}(J\cap I^+,K\cap I^+)b_{I'\cap I^-}(J\cap I^-,K\cap I^-)$$
$$cd_{I'}(P)=c_{I'\cap I^+}(P\cap I^+)d_{I'\cap I^-}(P\cap I^-).$$
Alors il est facile de voir que ces fonctions satisfont la condition de la proposition ci-dessus.

Démonstration de la proposition 7.1. On raisonne par récurrence sur le couple $(|I|,|\mathcal{P}_{ord}(\lambda)|)$ (on utilise l'ordre lexicographique). Si $I=\varnothing$, le résultat est évident. Si $\mathcal{P}_{ord}(\lambda)=\varnothing$, alors $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i\leqslant 0$, donc $\sum\limits_{i\in I^+}\lambda_i\leqslant 0$ ou $\sum\limits_{i\in I^-}\lambda_i\leqslant 0$, donc $\mathcal{P}_{ord}(\lambda^+)=\varnothing$ ou $\mathcal{P}_{ord}(\lambda^-)=\varnothing$, et le résultat est vrai aussi. On suppose donc que $I\neq\varnothing$ et $\mathcal{P}_{ord}(\lambda)\neq\varnothing$. On suppose aussi que $I^+\neq\varnothing$ et $I^-\neq\varnothing$, car sinon le résultat est trivial. On distingue deux cas : $N(\lambda)=|I|$ et $N(\lambda)<|I|$.

Traitons d'abord le cas où $N(\lambda)<|I|$. On utilise les notations δ, J, λ', μ, ν, etc du lemme 7.14. Si cela est possible, on choisit J tel que $J\subset I^+$ ou $J\subset I^-$. On note de plus $K=I-J$, $J^\pm=J\cap I^\pm$, $K^\pm=K\cap I^\pm$, et on définit $\lambda'^\pm$, $\mu^\pm$, $\nu^\pm$ de manière similaire à $\lambda^\pm$. D'après le lemme 7.14, on a $\mathcal{P}_{ord}(\lambda)=\mathcal{P}_{ord}(\lambda')\sqcup\mathcal{P}'(\lambda)$, où $\mathcal{P}'(\lambda)=\mathcal{P}'_{ord}(I)\cap\mathcal{P}_{ord}(\lambda)$, et on a de plus une bijection naturelle $\mathcal{P}'(\lambda)\xrightarrow{\sim}\mathcal{P}_{ord}(\mu)\times\mathcal{P}_{ord}(\nu)$. Comme $s_J(\lambda)>0$, on a $s_{J^+}(\lambda)>0$ ou $s_{J^-}(\lambda)>0$. Quitte à intervertir I^+ et I^-, on peut supposer que $s_{J^+}(\lambda)>0$ (donc en particulier $J^+\neq\varnothing$). Alors, d'après le lemme 7.11, on a $s_{J^-}(\lambda)\leqslant 0$. Supposons d'abord $J\cap I^-\neq\varnothing$. D'après le choix de J, pour tout $L\subset I^\pm$ tel que $s_L(\lambda)>0$, on a $s_L(\lambda)/|L|\geqslant\delta$, et $s_L(\lambda)/|L|>\delta$ si $L\subset J$ (on ne peut pas avoir $L=J$, car $J^+,J^-\neq\varnothing$), donc $s_L(\lambda')=s_L(\lambda)-\delta|L\cap J|>0$. On en déduit que $\mathcal{P}_{ord}(\lambda^\pm)=\mathcal{P}_{ord}(\lambda'^\pm)$. De plus, comme $s_{J^-}(\lambda)\leqslant 0$, on a $\mathcal{P}_{ord}(\mu^-)=\varnothing$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $\mu\in\mathbb{R}^J$, on en déduit que
$$\sum_{P_1\in\mathcal{P}_{ord}(\mu)}(-1)^{|P_1|}c_{J^+}(P_1\cap J^+)d_{J^-}(P_1\cap J^-)=0,$$
donc
$$\sum_{P\in\mathcal{P}'(\lambda)}(-1)^{|P|}c_{I^+}(P\cap I^+)d_{I^-}(P\cap I^-)=a_{I^+}(J^+,K^+)b_{I^-}(J^-,K^-)\sum_{P_1\in\mathcal{P}_{ord}(\mu)}(-1)^{|P_1|}$$
$$c_{J^+}(P_1\cap J^+)d_{J^-}(P_1\cap J^-)\sum_{P_2\in\mathcal{P}_{ord}(\nu)}(-1)^{|P_2|}c_{K^+}(P_2\cap K^+)d_{K^-}(P_2\cap K^-)=0$$

(on applique les hypothèse sur c_{I^+} et d_{I^-} aux partitions (J^+,K^+) et (J^-,K^-)), donc

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda)}(-1)^{|P|}c_{I^+}(P\cap I^+)d_{I^-}(P\cap I^-)=\sum_{P\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda')}(-1)^{|P|}c_{I^+}(P\cap I^+)d_{I^-}(P\cap I^-).$$

L'égalité cherchée résulte de l'hypothèse de récurrence appliquée à λ' (et du fait que $\mathcal{P}_{ord}(\lambda'^{\pm})=\mathcal{P}_{ord}(\lambda^{\pm})$). Supposons maintenant que $J\cap I^-=\varnothing$, c'est-à-dire que $J\subset I^+$. En appliquant le lemme 7.14 à I^+, on voit que $\mathcal{P}_{ord}(\lambda^+)=\mathcal{P}_{ord}(\lambda'^+)\sqcup\mathcal{P}'(\lambda^+)$, où $\mathcal{P}'(\lambda^+)=\mathcal{P}'_{ord}(I^+)\cap\mathcal{P}_{ord}(\lambda^+)$ et $\mathcal{P}'_{ord}(I^+)$ est défini comme $\mathcal{P}'_{ord}(I)$, mais en utilisant $J^+\subset I^+$ (au lieu de $J\subset I$). D'autre part, on a $\mu=\mu^+$ et $\lambda^-=\lambda'^-=\nu^-$. Comme $\mathcal{P}_{ord}(\lambda)=\mathcal{P}_{ord}(\lambda')\sqcup\mathcal{P}'(\lambda)$, on a

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda)}(-1)^{|P|}c_{I^+}(P\cap I^+)d_{I^-}(P\cap I^-)=$$
$$\sum_{P\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda')}(-1)^{|P|}c_{I^+}(P\cap I^+)d_{I^-}(P\cap I^-)+\sum_{P\in\mathcal{P}'(\lambda)}(-1)^{|P|}c_{I^+}(P\cap I^+)d_{I^-}(P\cap I^-).$$

D'après l'hypothèse sur c_{I^+} (et le fait que $I^-=K^-$), on a

$$\sum_{P\in\mathcal{P}'(\lambda)}(-1)^{|P|}c_{I^+}(P\cap I^+)d_{I^-}(P\cap I^-)=$$
$$a_{I^+}(J,K^+)\sum_{P_1\in\mathcal{P}_{ord}(\mu)}(-1)^{|P_1|}c_J(P_1)\sum_{P_2\in\mathcal{P}_{ord}(\nu)}(-1)^{|P_2|}c_{K^+}(P_2\cap K^+)d_{I^-}(P_2\cap I^-).$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à ν, on trouve que ceci est égal à

$$a_{I^+}(J,K^+)\sum_{P_1\in\mathcal{P}_{ord}(\mu)}(-1)^{|P_1|}c_J(P_1)\sum_{P_2^+\in\mathcal{P}_{ord}(\nu^+)}(-1)^{|P_2^+|}c_{K^+}(P_2^+)\sum_{P^-\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda^-)}(-1)^{|P^-|}d_{I^-}(P^-).$$

D'autre part, en appliquant l'hypothèse de récurrence à λ', on trouve

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda')}(-1)^{|P|}c_{I^+}(P\cap I^+)d_{I^-}(P\cap I^-)=$$
$$\sum_{P^+\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda'^+)}(-1)^{|P^+|}c_{I^+}(P^+)\sum_{P^-\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda^-)}(-1)^{|P^-|}d_{I^-}(P^-).$$

L'égalité cherchée résulte de ces calculs et du fait que $\mathcal{P}_{ord}(\lambda^+)=\mathcal{P}_{ord}(\lambda'^+)\sqcup\mathcal{P}'(\lambda^+)$, avec $\mathcal{P}'(\lambda^+)\xrightarrow{\sim}\mathcal{P}_{ord}(\mu)\times\mathcal{P}_{ord}(\nu^+)$.

Il reste à traiter le cas où $N(\lambda)=|I|$. D'après le lemme 7.11, on a $s_{I^+}(\lambda)\leqslant 0$ ou $s_{I^-}(\lambda)\leqslant 0$. Quitte à échanger I^+ et I^-, on peut supposer que $s_{I^+}(\lambda)\leqslant 0$. Donc le membre de droite de l'égalité de la proposition est nul, et il s'agit de montrer que $\sum\limits_{P\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda)}(-1)^{|P|}c_{I^+}(P\cap I^+)d_{I^-}(P\cap I^-)=0$.

On note $\mathcal{P}'$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}_{ord}(\lambda)$ formé des $P=(I_1,\dots,I_k)$ telles qu'il existe $r\in\{1,\dots,k\}$ vérifiant l'une des deux conditions suivantes :

(a) $r\leqslant k-1$, $I_r\subset I^-$ et $I_{r+1}\subset I^+$;

(b) $I_r\cap I^+\neq\varnothing$, $I_r\cap I^-\neq\varnothing$, et $(I_1,\dots,I_{r-1},I_r\cap I^-,I_r\cap I^+,I_{r+1},\dots,I_k)\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda)$.

On définit une application $\iota:\mathcal{P}'\longrightarrow\mathcal{P}'$ de la manière suivante : Soit $P=(I_1,\dots,I_k)\in\mathcal{P}'$. Soit r le plus petit élément de $\{1,\dots,k\}$ qui vérifie (a) ou (b). Si r vérifie (a), on pose $\iota(P)=(I_1,\dots,I_{r-1},I_r\cup I_{r+1},I_{r+2},\dots,I_k)$. Si r vérifie (b), on pose $\iota(P)=(I_1,\dots,I_{r-1},I_r\cap I^-,I_r\cap I^+,I_{r+1},\dots,I_k)$. Il est clair que, pour tout $P\in\mathcal{P}'$, $(-1)^{|P|}=-(-1)^{|\iota(P)|}$, $\iota(P)\cap I^{\pm}=P\cap I^{\pm}$ et $\iota(\iota(P))=P$. Donc

$$\sum_{P\in\mathcal{P}'}(-1)^{|P|}c_{I^+}(P\cap I^+)d_{I^-}(P\cap I^-)=0.$$

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$. Soit $P = (I_1, \dots, I_k) \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda) - \mathcal{P}'$. On va montrer que $P \cap I^+ \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda^+)$; ceci contredit le fait que $s_{I^+}(\lambda) \leqslant 0$, donc finit la preuve. On note $P \cap I^+ = (J_1, \dots, J_l)$. Montrons par récurrence sur r que, pour tout $r \in \{1, \dots, l\}$, $\sum\limits_{i=1}^{r} s_{J_i}(\lambda) > 0$. Soit $r \in \{1, \dots, l\}$; on suppose que l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour tout $r' < r$. Soit $m \in \{1, \dots, k\}$ tel que $J_r \subset I_m$.

On se place d'abord dans le cas où, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $I_i \subset I^+$ ou $I_i \subset I^-$; en particulier, comme $I_m \cap I^+ = J_r \neq \varnothing$, on a $I_m \subset I^+$, donc $I_m = J_r$. Comme $P \notin \mathcal{P}'$, on a $I_i \subset I^+$ pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$; donc $r = m$ et $I_i = J_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. Comme $P \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$, $\sum\limits_{i=1}^{r} s_{J_i}(\lambda) = \sum\limits_{i=1}^{r} s_{I_i}(\lambda) > 0$.

On traite maintenant le cas où il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $I_i \cap I^+ \neq \varnothing$ et $I_i \cap I^- \neq \varnothing$. Soit n le plus grand élément de $\{1, \dots, m\}$ tel que $I_n \cap I^+ \neq \varnothing$ et $I_n \cap I^- \neq \varnothing$. Soit $s \in \{1, \dots, r\}$ tel que $J_s = I_n \cap I^+$. On note $K = I_n - J_s = I_n \cap I^-$. D'après la définition de n, on a $I_i \subset I^+$ ou $I_i \subset I^-$ pour tout $i \in \{n+1, \dots, m-1\}$. Si $m = n$, alors $I_i \subset I^+$ pour tout $i \in \{n+1, \dots, m-1\}$ (trivialement). Si $m > n$, alors $I_m \subset I^+$ ou $I_m \subset I^-$ (par définition de n), donc $I_m \subset I^+$ (car $I_m \cap I^+ = J_r \neq \varnothing$) ; comme $P \notin \mathcal{P}'$, on a donc forcément $I_i \subset I^+$ pour tout $i \in \{n+1, \dots, m-1\}$. Dans les deux cas, on en déduit que $r - s = m - n$ et $I_{n+i} = J_{s+i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, r-s\}$. D'après l'hypothèse de récurrence (si $s \geqslant 2$) ou trivialement (si $s = 1$), on a $\sum\limits_{i=1}^{s-1} s_{J_i}(\lambda) \geqslant 0$. De plus, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} s_{I_i}(\lambda)\right) + s_{J_s}(\lambda) + s_K(\lambda) + \sum_{i=s+1}^{r} s_{J_i}(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} s_{I_i}(\lambda) > 0$$

(car $P \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$), et

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} s_{I_i}(\lambda)\right) + s_K(\lambda) \leqslant 0$$

(car $P \notin \mathcal{P}'$), donc $\sum\limits_{i=s}^{r} s_{J_i}(\lambda) > 0$, et on en déduit que $\sum\limits_{i=1}^{r} s_{J_i}(\lambda) > 0$.

□

Corollaire 7.3. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors*

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda)} (-1)^{|P|} = \begin{cases} (-1)^n & \textit{si } \lambda_r > 0 \textit{ pour tout } r \in \{1, \dots, n\} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. Le résultat est évident si $n = 1$. On suppose que $n \geqslant 2$, et que le résultat du corollaire est connu pour $n-1$. On applique la proposition 7.1, avec les choix suivants pour a_I, b_I, c_I, d_I : pour tout I, on prend $a_I = b_I = c_I = d_I = 1$. La proposition 7.1, pour $I = \{1, \dots, n\}$, $I^+ = \{1, \dots, n-1\}$ et $I^- = \{n\}$, dit que :

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda)} (-1)^{|P|} = \sum_{P \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})} (-1)^{|P|} \sum_{Q \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda_n)} (-1)^{|Q|}.$$

L'égalité cherchée résulte alors de l'hypothèse de récurrence appliquée à $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ (et du cas $n = 1$).

□

Proposition 7.4. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Alors*

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda)} (-1)^{|P|} \varepsilon(P) \varepsilon'(P) = (-1)^n \sum_{p \in \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(n)} \varepsilon(p) c(p, \lambda).$$

Corollaire 7.5. *Soient $n, m \in \mathbb{N}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+2m}) \in \mathbb{R}^{n+2m}$ et I^+, I^- des sous-ensembles disjoints de $\{1, \dots, n\}$ tels que $\{1, \dots, n\} = I^+ \cup I^-$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on note $\lambda'_i = \lambda_{n+2i-1} + \lambda_{n+2i}$. Alors*

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_{ord}(n,m,\lambda)} (-1)^{|P|} \varepsilon(P^+) \varepsilon(P^-) \varepsilon'(P^+) \varepsilon'(P^-) =$$

$$(-1)^{n+m} c_1(\lambda'_1) \dots c_1(\lambda'_m) \sum_{p^+ \in \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(I^+)} \sum_{p^- \in \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(I^-)} \varepsilon(p^+) \varepsilon(p^-) c(p^+, \lambda) c(p^-, \lambda),$$

où, pour toute $P \in \mathcal{P}_{ord}(n, m)$, $P^+ = P \cap I^+$ et $P^- = P \cap I^-$.

Démonstration. Soit $u : \{1, \dots, n+2m\} \longrightarrow \{1, \dots, n+m\}$ définie par les formules suivantes : $u(i) = i$ si $1 \leqslant i \leqslant n$, et, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $u(n+2i-1) = u(n+2i) = n+i$. Soit $\varphi : \mathcal{P}_{ord}(n, m) \longrightarrow \mathcal{P}_{ord}(n+m)$ l'application qui envoie $(I_1, \dots, I_k)$ sur $(u(I_1), \dots, u(I_k))$. Il est clair que φ est bijective et que, pour toute $P \in \mathcal{P}_{ord}(n, m)$, on a $|P| = |\varphi(P)|$, $P \cap I^\pm = \varphi(P) \cap I^\pm$ et $P \in \mathcal{P}_{ord}(n, m, \lambda)$ si et seulement si $\varphi(P) \in \mathcal{P}_{ord}(\mu)$, où $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$. Donc le membre de gauche de l'égalité de la proposition est égal à

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_{ord}(\mu)} (-1)^{|P|} \varepsilon(P \cap I^+) \varepsilon(P \cap I^-) \varepsilon'(P \cap I^+) \varepsilon'(P \cap I^-).$$

On applique la proposition 7.1 à $(\{1, \dots, n\}, \{n+1, \dots, n+m\}) \in \mathcal{D}(\{1, \dots, n+m\})$, avec, pour tout $I \subset \{1, \dots, n+m\}$, $a_I : (J, K) \in \mathcal{D}(I) \longmapsto \varepsilon(J \cap I^+, K \cap I^+) \varepsilon(J \cap I^-, K \cap I^-)$, $c_I : P \in \mathcal{P}_{ord}(I) \longmapsto \varepsilon(P \cap I^+) \varepsilon(P \cap I^-) \varepsilon'(P \cap I^+) \varepsilon'(P \cap I^-)$ (cf les points (4) et (6) de l'exemple 7.2), $b_I = 1$ et $d_I = 1$. On trouve que la somme ci-dessus est égale à

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} (-1)^{|P|} \varepsilon(P \cap I^+) \varepsilon(P \cap I^-) \varepsilon'(P \cap I^+) \varepsilon'(P \cap I^-) \sum_{Q \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)} (-1)^{|Q|}.$$

D'après le corollaire 7.3,

$$\sum_{Q \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)} (-1)^{|Q|} = (-1)^m c_1(\lambda'_1) \dots c_1(\lambda'_m).$$

On applique une deuxième fois la proposition 7.1, cette fois à $(I^+, I^-) \in \mathcal{D}(\{1, \dots, n\})$, avec, pour tout $I \subset \{1, \dots, n\}$, $a_I = b_I : (J, K) \in \mathcal{D}(I) \longmapsto \varepsilon(J, K)$ et $c_I = d_I : P \in \mathcal{P}_{ord}(I) \longmapsto \varepsilon(P) \varepsilon'(P)$. On trouve que $\sum\limits_{P \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} (-1)^{|P|} \varepsilon(P \cap I^+) \varepsilon(P \cap I^-) \varepsilon'(P \cap I^+) \varepsilon'(P \cap I^-)$ est égal à

$$\sum_{P^+ \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda^+)} (-1)^{|P^+|} \varepsilon(P^+) \varepsilon'(P^+) \sum_{P^- \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda^-)} (-1)^{|P^-|} \varepsilon(P^-) \varepsilon'(P^-),$$

où $\lambda^\pm = (\lambda_i)_{i \in I^\pm}$. L'égalité du corollaire résulte donc de la proposition 7.4, appliquée à λ^+ et λ^-. □

Démonstration de la proposition 7.4. Comme dans la preuve de la proposition 7.1, on raisonne par récurrence sur le couple $(n, |\mathcal{P}_{ord}(\lambda)|)$. Si $n \leqslant 1$ ou si $\mathcal{P}_{ord}(\lambda) = \varnothing$, le résultat est évident.

Supposons que $n = 2$ et $\mathcal{P}_{ord}(\lambda) \neq \varnothing$ (donc $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$). Alors $\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda) = \{\{1,2\}\}$, donc $\sum\limits_{p\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda)} \varepsilon(p)c(p,\lambda) = c(\{\{1,2\}\},\lambda)$. Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors $\mathcal{P}_{ord}(\lambda) = \{\{1,2\},(\{1\},\{2\}),(\{2\},\{1\})\}$, donc $\sum\limits_{P\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda)} (-1)^{|P|}\varepsilon(P)\varepsilon'(P) = 1$. Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 \leqslant 0$, alors $\mathcal{P}_{ord}(\lambda) = \{\{1,2\},(\{1\},\{2\})\}$, donc $\sum\limits_{P\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda)} (-1)^{|P|}\varepsilon(P)\varepsilon'(P) = 2$. Si $\lambda_1 \leqslant 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors $\mathcal{P}_{ord}(\lambda) = \{\{1,2\},(\{2\},\{1\})\}$, donc $\sum\limits_{P\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda)} (-1)^{|P|}\varepsilon(P)\varepsilon'(P) = 0$. Dans tous les cas, l'égalité cherchée est vraie.

Supposons que $n \geqslant 3$ et $\mathcal{P}_{ord}(\lambda) \neq \varnothing$. Comme $\mathcal{P}_{ord}(\lambda) \neq \varnothing$, on a $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n > 0$ et $\delta := \delta(\lambda) > 0$. Soient J et λ' comme dans le lemme 7.14, dont on utilise les notations. On note $\mathcal{P}'_{ord} = \mathcal{P}_{ord}(\lambda) \cap \mathcal{P}'_{ord}(n)$ et $\mathcal{P}' = \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda) \cap \mathcal{P}'(n)$. D'après le (ii) du lemme 7.14, on a $\mathcal{P}_{ord}(\lambda) = \mathcal{P}_{ord}(\lambda') \sqcup \mathcal{P}'_{ord}$, $\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda) = \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda') \sqcup \mathcal{P}'$ et $|\mathcal{P}_{ord}(\lambda')| < |\mathcal{P}_{ord}(\lambda)|$. Soit $p = \{I_\alpha, \alpha \in A\} \in \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda')$. Soit $\alpha \in A$. Si $J \cap I_\alpha = \varnothing$, on a évidemment $c_{I_\alpha}(\lambda') = c_{I_\alpha}(\lambda)$. Si $I_\alpha \subset J$, on a $I_\alpha \neq J$ car $p \in \mathcal{P}(\lambda')$, donc, d'après le (i) du lemme 7.14, $c_{I_\alpha}(\lambda') = c_{I_\alpha}(\lambda)$. Si $|J \cap I_\alpha| = 1$ et $J \cap I_\alpha \neq J$, alors, toujours d'après le (i) du lemme 7.14, $c_{I_\alpha}(\lambda') = c_{I_\alpha}(\lambda)$. Finalement, on trouve que $c_p(\lambda') = c_p(\lambda)$ sauf si $|J| = 1$, et, si $|J| = 1$, le seul élément α de A tel que $c_{I_\alpha}(\lambda') \neq c_{I_\alpha}(\lambda)$ est celui qui vérifie $J \subset I_\alpha$.

Supposons que $|J| \geqslant 3$. Alors $\mathcal{P}' = \varnothing$ (d'après le (i) du lemme 7.11), donc

$$\sum_{p\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda)} \varepsilon(p)c(p,\lambda) = \sum_{p\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda')} \varepsilon(p)c(p,\lambda) = \sum_{p\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda')} \varepsilon(p)c(p,\lambda').$$

D'autre part, si $\mu \in \mathbb{R}^{|J|}$ est défini comme dans le lemme 7.14, on a $N(\mu) = |J|$, donc $\sum\limits_{P\in\mathcal{P}_{ord}(\mu)} (-1)^{|P|}\varepsilon(P)\varepsilon'(P) = 0$ d'après les lemmes 7.7 et 7.9. En utilisant les points (iii) et (iv) du lemme 7.14, on en déduit que $\sum\limits_{P\in\mathcal{P}'_{ord}} (-1)^{|P|}\varepsilon(P)\varepsilon'(P) = 0$, donc que $\sum\limits_{P\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda)} (-1)^{|P|}\varepsilon(P)\varepsilon'(P) = \sum\limits_{P\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda')} (-1)^{|P|}\varepsilon(P)\varepsilon'(P)$. L'égalité cherchée résulte alors de l'hypothèse de récurrence, appliquée à λ'.

Supposons que $|J| = 2$. On utilise toujours les notations du lemme 7.14. D'après les points (iii) et (iv) de ce lemme, $\sum\limits_{P\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda)} (-1)^{|P|}\varepsilon(P)\varepsilon'(P)$ est égale à

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda')} (-1)^{|P|}\varepsilon(P)\varepsilon'(P) + \varepsilon_0 \sum_{P_1\in\mathcal{P}_{ord}(\mu)} (-1)^{|P_1|}\varepsilon(P_1)\varepsilon'(P_1) \sum_{P_2\in\mathcal{P}_{ord}(\nu)} (-1)^{|P_2|}\varepsilon(P_2)\varepsilon'(P_2).$$

D'autre part, comme $|J|$ est pair, l'application φ du lemme 7.14 induit une bijection $\mathcal{P}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\mu) \times \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\nu)$. Donc, d'après les points (iii) et (iv) de ce lemme et le fait que $c(p,\lambda) = c(p,\lambda')$ pour toute $p \in \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda')$, $\sum\limits_{p\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda)} \varepsilon(p)c(p,\lambda)$ est égale à

$$\sum_{p\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda')} \varepsilon(p)c(p,\lambda') + \varepsilon_0 \sum_{p_1\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\mu)} \varepsilon(p_1)c(p_1,\mu) \sum_{p_2\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\nu)} \varepsilon(p_2)c(p_2,\nu).$$

L'égalité cherchée résulte alors de l'hypothèse de récurrence, appliquée à λ', μ et ν.

Supposons que $|J| = 1$. On a comme avant, d'après les points (iii) et (iv) du lemme 7.11 et l'hypothèse de récurrence appliquée à λ', μ et ν,

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda)} (-1)^{|P|}\varepsilon(P)\varepsilon'(P)$$

$$= \sum_{P\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda')} (-1)^{|P|}\varepsilon(P)\varepsilon'(P) + \varepsilon_0 \sum_{P_1\in\mathcal{P}_{ord}(\mu)} (-1)^{|P_1|}\varepsilon(P_1)\varepsilon'(P_1) \sum_{P_2\in\mathcal{P}_{ord}(\nu)} (-1)^{|P_2|}\varepsilon(P_2)\varepsilon'(P_2)$$

$$= (-1)^n \sum_{p\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda')} \varepsilon(p)c(p,\lambda') + (-1)^n\varepsilon_0 \sum_{p_1\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\mu)} \varepsilon(p_1)c(p_1,\mu) \sum_{p_2\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\nu)} \varepsilon(p_2)c(p_2,\nu).$$

On traite d'abord le cas où n est impair. Si n est impair, alors φ induit une bijection $\mathcal{P}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\mu)\times\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\nu)$, donc la somme ci-dessus est égale à

$$(-1)^n \sum_{p\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda')} \varepsilon(p)c(p,\lambda') + (-1)^n \sum_{p\in\mathcal{P}'} \varepsilon(p)c(p,\lambda),$$

et il reste à montrer que

$$\sum_{p\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda')} \varepsilon(p)c(p,\lambda') = \sum_{p\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda')} \varepsilon(p)c(p,\lambda).$$

Soit $p\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda')$. Soient $\alpha_0,\alpha_1\in A$ tels que $|I_{\alpha_0}|=1$ et $J\subset I_{\alpha_1}$. On écrit $I_{\alpha_0}=\{i_0\}$ et $I_{\alpha_1}=\{i_1,i_2\}$, avec $J=\{i_1\}$. On définit $p'\in\mathcal{P}(n)$ par $p'=\{I_\alpha,\alpha\in A-\{\alpha_0,\alpha_1\}\}\cup\{\{i_0,i_1\},\{i_2\}\}$; comme $\lambda'_{i_1}=0$ et $s_{I_{\alpha_1}}(\lambda')>0$, on a $\lambda'_{i_2}>0$, donc $p'\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda')$. L'application $p\longmapsto p'$ est donc une involution (sans points fixes) de $\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda')$, et on vérifie facilement (en examinant toutes les possibilités pour les positions relatives de i_0, i_1 et i_2) que

$$\varepsilon(p)c(p,\lambda)+\varepsilon(p')c(p',\lambda)=\varepsilon(p)c(p,\lambda')+\varepsilon(p')c(p',\lambda').$$

L'égalité cherchée en résulte.

On traite enfin le cas où n est pair (et $|J|=1$). Dans ce cas, on a $\mathcal{P}'=\varnothing$, donc il faut montrer que $\sum\limits_{p\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda)} \varepsilon(p)c(p,\lambda)$ est égale à

$$\sum_{p\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda')} \varepsilon(p)c(p,\lambda') + \varepsilon_0 \sum_{p_1\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\mu)} \varepsilon(p_1)c(p_1,\mu) \sum_{p_2\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\nu)} \varepsilon(p_2)c(p_2,\nu).$$

Soit $p=\{I_\alpha\in A\}\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda')$. Soit $\alpha_0\in A$ tel que $J\subset I_{\alpha_0}$. On écrit $I_{\alpha_0}=\{i_1,i_2\}$, avec $J=\{i_1\}$. Comme $s_{I_{\alpha_0}}(\lambda')>0$ et $\lambda'_{i_1}=0$, on a $\lambda'_{i_2}>0$. On pose $p_1=\{\{i_1\}\}$ et $p_2=\{I_\alpha,\alpha\in A-\{\alpha_0\}\}\cup\{\{i_2\}\}$. Alors l'application $p\longmapsto(p_1,p_2)$ induit une bijection $\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda')\xrightarrow{\sim}\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\mu)\times\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\nu)$. De plus, on voit facilement (en distinguant les cas $i_1<i_2$ et $i_1>i_2$) que

$$\varepsilon(p)c(p,\lambda)=\varepsilon(p)c(p,\lambda')+\varepsilon_0\varepsilon(p_1)c(p_1,\mu)\varepsilon(p_2)c(p_2,\nu).$$

L'égalité cherchée en résulte.

□

Lemme 7.6. *Soient $n\in\mathbb{N}$ et $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$.*

Alors

$$\sum_{P\in\mathcal{P}^0_{ord}(\lambda)} (-1)^{|P|}\varepsilon(P)\varepsilon'(P) = (-1)^n \sum_{p\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda)} \varepsilon(p).$$

Démonstration. Comme dans la preuve de la proposition 7.1, on raisonne par récurrence sur $(n,|\mathcal{P}_{ord}(\lambda)|)$. Le résultat est immédiat si $n\leqslant 2$ ou si $\mathcal{P}_{ord}(\lambda)=\varnothing$. On suppose donc que $n\geqslant 3$ et que $\mathcal{P}_{ord}(\lambda)\neq\varnothing$ (c'est-à-dire que $\lambda_1+\dots+\lambda_n>0$). On note $\delta=\delta(\lambda)$. Soient J et λ' comme dans le lemme 7.14, dont on utilise les notations. On note $\mathcal{P}'_{ord}=\mathcal{P}'_{ord}(n)\cap\mathcal{P}^0_{ord}(\lambda)$ et $\mathcal{P}'=\mathcal{P}'(n)\cap\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda)$. D'après le (ii) du lemme 7.14, on a $|\mathcal{P}_{ord}(\lambda')|<|\mathcal{P}_{ord}(\lambda)|$, $\mathcal{P}^0_{ord}(\lambda)=\mathcal{P}^0_{ord}(\lambda')\sqcup\mathcal{P}'_{ord}$ et $\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda)=\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda')\sqcup\mathcal{P}'$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à λ', on trouve $\sum\limits_{P\in\mathcal{P}^0_{ord}(\lambda')}(-1)^{|P|}\varepsilon(P)\varepsilon'(P)=(-1)^n\sum\limits_{p\in\mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda')}\varepsilon(p)$. Il suffit donc de montrer que $\sum\limits_{P\in\mathcal{P}'_{ord}}(-1)^{|P|}\varepsilon(P)\varepsilon'(P)=(-1)^n\sum\limits_{p\in\mathcal{P}'}\varepsilon(p)$.

On rappelle qu'on utilise les notations du lemme 7.14 ; en particulier, on note $m = N(\lambda)(= |J|)$. Si $m = n$ (c'est-à-dire $J = \{1, \dots, n\}$), on a $\mathcal{P}'_{ord} = \mathcal{P}^0_{ord}(\lambda)$ (car $\mathcal{P}'_{ord}(n) = \mathcal{P}_{ord}(n)$ par définition) et $\mathcal{P}' = \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\lambda) = \varnothing$ (car $\mathcal{P}(\lambda) = \{\{1, \dots, n\}\}$ d'après le (i) du lemme 7.11, et $n \geqslant 3$), donc l'égalité cherchée résulte du lemme 7.7 ci-dessous. Si m et $n - m$ sont tous les deux impairs, alors il est clair que $\mathcal{P}'_{ord} = \mathcal{P}' = \varnothing$. On peut donc supposer que $m < n$, et que m et $n - m$ ne sont pas tous les deux impairs. Alors le (iv) du lemme 7.14 implique que $\varphi_{ord}(\mathcal{P}'_{ord}) = \mathcal{P}^0_{ord}(\mu) \times \mathcal{P}^0_{ord}(\nu)$ et $\varphi(\mathcal{P}') = \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\mu) \times \mathcal{P}^0_{\leqslant 2}(\nu)$. L'égalité cherchée résulte donc de l'hypothèse de récurrence appliquée à μ et à ν et du point (iii) du lemme 7.14.

□

Lemme 7.7. *On suppose que $n \geqslant 3$. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n > 0$ et $N(\lambda) = n$. Alors*

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^0_{ord}(\lambda)} (-1)^{|P|} \varepsilon(P) \varepsilon'(P) = 0.$$

Démonstration. On note m la partie entière de $n/2$. D'après la remarque sous la définition de ε', on a $\varepsilon'(P) = (-1)^m$ pour toute $P \in \mathcal{P}^0_{ord}(n)$. Il suffit donc de montrer que

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^0_{ord}(\lambda)} (-1)^{|P|} \varepsilon(P) = 0.$$

Soit $\mathcal{P}'_{ord}$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}^0_{ord}(\lambda)$ formé des partitions ordonnées P telles que, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $2i$ et $2i - 1$ soient dans le même ensemble de P. On définit par récurrence descendante sur $i \in \{1, \dots, m\}$ des sous-ensembles $\mathcal{P}''_{ord,i}$ de $\mathcal{P}^0_{ord}(n)$ de la manière suivante : $\mathcal{P}''_{ord,i}$ est l'ensemble des $P \in \mathcal{P}^0_{ord}(n) - \bigcup\limits_{j=i+1}^{m} \mathcal{P}''_{ord,j}$ telles que $2i$ et $2i - 1$ soient dans des ensembles différents de P. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on note $\mathcal{P}''_{ord,i}(\lambda) = \mathcal{P}''_{ord,i} \cap \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$. Alors $\mathcal{P}^0_{ord}(\lambda) - \mathcal{P}'_{ord}$ est union disjointe des $\mathcal{P}''_{ord,i}(\lambda)$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

D'après les lemmes 7.11 et 7.13, pour toute $p \in \mathcal{P}(n)$, le cardinal de $\mathrm{oub}^{-1}(p) \cap \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$ est $(|p| - 1)!$, c'est-à-dire $|\,\mathrm{oub}^{-1}(p)|/|p|$.

Soit $i \in \{1, \dots, m\}$. On note $\mathcal{P}''_i = \mathrm{oub}(\mathcal{P}''_{ord,i})$. D'après la remarque ci-dessus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}''_{ord,i}(\lambda), |P| = k} (-1)^{|P|} \varepsilon(P) = (-1)^k (k-1)! \sum_{p \in \mathcal{P}''_i, |p| = k} \varepsilon(p).$$

On définit une involution de $\mathcal{P}''_i$ en envoyant une partition p sur la partition p' obtenue en échangeant $2i$ et $2i - 1$. On a alors $\varepsilon(p') = -\varepsilon(p)$ et $|p'| = |p|$; donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{p \in \mathcal{P}''_i, |p| = k} \varepsilon(p) = 0.$$

On en déduit que, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $\sum\limits_{P \in \mathcal{P}''_{ord,i}(\lambda)} (-1)^{|P|} \varepsilon(P) = 0$, donc que

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^0_{ord}(\lambda)} (-1)^{|P|} \varepsilon(P) = \sum_{P \in \mathcal{P}'_{ord}} (-1)^{|P|} \varepsilon(P).$$

D'autre part, on remarque que $\varepsilon(P) = 1$ pour toute $P \in \mathcal{P}'_{ord}$. Donc

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^0_{ord}(\lambda)} (-1)^{|P|} \varepsilon(P) = \sum_{P \in \mathcal{P}'_{ord}} (-1)^{|P|}.$$

Notons $\mu = (\lambda_1+\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}+\lambda_n)$ si n est pair, et $\mu = (\lambda_1+\lambda_2, \dots, \lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}, \lambda_n)$ si n est impair. Alors $\mathcal{P}'_{ord}$ est de manière évidente en bijection avec $\mathcal{P}_{ord}(\mu)$ (et cette bijection est compatible avec les applications $P \longmapsto |P|$), donc le lemme résulte du corollaire 7.3 (on utilise ici l'hypothèse $n \geqslant 3$ pour voir que les coordonnées de μ ne peuvent pas être toutes strictement positives).

□

Remarque 7.8. Le lemme 7.6 reste valable si l'on remplace tous les "> 0" par des "$\geqslant 0$" dans les définitions de $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}_{ord}(\lambda)$ (c'est-à-dire si l'on remplace $\mathcal{P}(\lambda)$ par l'ensemble des $p = \{I_\alpha, \alpha \in A\} \in \mathcal{P}(n)$ telles que $s_{I_\alpha}(\lambda) \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in A$ et $\mathcal{P}_{ord}(\lambda)$ par l'ensemble des $P = (I_1, \dots, I_r) \in \mathcal{P}_{ord}(n)$ telles que $s_{I_1}(\lambda) + \cdots + s_{I_i}(\lambda) \geqslant 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$).

En effet, si l'on définit $\lambda' \in \mathbb{R}^n$ par $\lambda' = (\lambda_1 + \eta, \dots, \lambda_n + \eta)$ avec $\eta > 0$ assez petit, alors, pour tout $I \subset \{1, \dots, n\}$, $s_I(\lambda) \geqslant 0$ si et seulement si $s_I(\lambda') > 0$. Il suffit alors d'appliquer le lemme 7.6 à λ'.

On rappelle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a noté $\mathcal{P}^k(n)$ l'ensemble des $p = \{I_\alpha, \alpha \in A\}$ dans $\mathcal{P}(n)$ telles que le cardinal de l'ensemble $\{\alpha \in A, |I_\alpha| \textit{ est impair}\}$ soit $2k$ ou $2k+1$, et $\mathcal{P}^k_{ord}(n) = \mathrm{oub}^{-1}(\mathcal{P}^k(n))$. Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}^k_{ord}(\lambda) = \mathcal{P}^k_{ord}(n) \cap \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$.

Lemme 7.9. *On suppose que $n \geqslant 3$. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n > 0$ et $N(\lambda) = n$. Alors, pour tout $k \geqslant 1$,*

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^k_{ord}(\lambda)} (-1)^{|P|} \varepsilon(P) \varepsilon'(P) = 0.$$

L'égalité du lemme est bien sûr vraie aussi si $k = 0$, puisque c'est le résultat du lemme 7.7 dans ce cas. (On a séparé les deux lemmes, car le lemme 7.6, qui utilise le lemme 7.7, sert dans la démonstration du lemme 7.9.)

Démonstration. On note m la partie entière de $n/2$. D'après la remarque sous la définition de ε', on a $\varepsilon'(P) = (-1)^{m-k}$ pour toute $P \in \mathcal{P}^k_{ord}(n)$. Il suffit donc de prouver que

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^k_{ord}(\lambda)} (-1)^{|P|} \varepsilon(P) = 0.$$

On suppose d'abord que n est impair. On va montrer un résultat plus précis. Soit $p = \{I_\alpha, \alpha \in A\} \in \mathcal{P}(n)$ telle que deux au moins des I_α aient un cardinal impair. Montrons que

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda) \cap \mathrm{oub}^{-1}(p)} \varepsilon(P) = 0.$$

Soit $P = (I_1, \dots, I_k) \in \mathrm{oub}^{-1}(p)$. D'après le lemme 7.11 (appliqué à λ_P), il existe un unique $l \in \{1, \dots, k\}$ tel que $P' := (I_l, \dots, I_k, I_1, \dots, I_{l-1})$ soit dans $\mathcal{P}_{ord}(\lambda)$. De plus, on a $\sigma_P = \tau^{|I_1|+\cdots+|I_{l-1}|}\sigma_{P'}$, donc $\varepsilon(P') = \varepsilon(P)$ (comme n est impair, $sgn(\tau) = 1$). On en déduit que

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda) \cap \mathrm{oub}^{-1}(p)} \varepsilon(P) = \frac{1}{|p|} \sum_{P \in \mathrm{oub}^{-1}(p)} \varepsilon(P).$$

On écrit $p = \{I_\alpha, \alpha \in A\}$. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ distincts tels que $|I_{\alpha_1}|$ et $|I_{\alpha_2}|$ soient impairs. On considère l'involution ι de $\mathrm{oub}^{-1}(p)$ qui échange les places des ensembles I_{α_1} et I_{α_2}. Alors $\varepsilon(\iota(P)) = -\varepsilon(P)$ pour tout $P \in \mathrm{oub}^{-1}(p)$, donc $\sum\limits_{P \in \mathrm{oub}^{-1}(p)} \varepsilon(P) = 0$.

On suppose maintenant que n est pair. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $P = (I_1, \dots, I_r) \in \mathcal{P}^k_{ord}(\lambda)$. On note $\mu = \lambda_P \in \mathbb{R}^r$ (donc $\mu_i = s_{I_i}(\lambda)$). Comme n est pair, il y a exactement $2k$ indices $i \in \{1, \dots, r\}$ tels que $|I_i|$

soit impair. On les note $i_1,\dots,i_{2k}$, avec $i_1<\dots<i_{2k}$. On utilise les notions introduites au-dessus du lemme 7.15, et on note $P=Q_1\dots Q_{2k}$ la décomposition de P en blocs de centres $I_{i_1},\dots,I_{i_{2k}}$ (cf le (iii) du lemme 7.15). Dans la suite de la preuve, on utilisera toujours cette décomposition en blocs, et on l'appellera la décomposition en blocs de P. On remarque que les blocs sont tous de taille impaire.

On note $\mathcal{P}'$ l'ensemble des $P\in\mathcal{P}^k_{ord}(\lambda)$ telles que, pour tout $m\in\{1,\dots,k\}$, Q_{2m-1} soit positif et Q_{2m} négatif. On définit par récurrence sur $l\in\{1,\dots,2k-1\}$ des sous-ensembles $\mathcal{P}''_l$ de $\mathcal{P}^k_{ord}(\lambda)$ de la manière suivante :

- pour tout $m\in\{1,\dots,k\}$, $\mathcal{P}''_{2m-1}$ est l'ensemble des $P\in\mathcal{P}^k_{ord}(\lambda)-\bigcup\limits_{1\leqslant l\leqslant 2m-3}\mathcal{P}''_l$ tels que Q_{2m-1} et Q_{2m} soient tous les deux positifs ;
- pour tout $m\in\{1,\dots,k-1\}$, $\mathcal{P}''_{2m}$ est l'ensemble des $P\in\mathcal{P}^k_{ord}(\lambda)-\bigcup\limits_{1\leqslant l\leqslant 2m-2}\mathcal{P}''_l$ tels que Q_{2m+1} et Q_{2m} soient tous les deux négatifs.

Alors on a $\mathcal{P}^k_{ord}(\lambda)=\mathcal{P}'\sqcup\coprod\limits_{1\leqslant l\leqslant 2k-1}\mathcal{P}''_l$.

Soit $l\in\{1,\dots,2k-1\}$. Soit $P\in\mathcal{P}''_l$. Soient $Q_1,\dots,Q_{2k}$ les blocs de P. On note $\iota(P)$ la partition ordonnée qu'on obtient en échangeant les blocs Q_l et Q_{l+1}. Alors, d'après le (ii) du lemme 7.15, $\iota(P)$ est encore dans $\mathcal{P}_{ord}(\lambda)$, $|\iota(P)|=|P|$, $\varepsilon(\iota(P))=-\varepsilon(P)$. De plus, il est clair que $\iota(P)\in\mathcal{P}''_l$. Donc l'application $P\longmapsto\iota(P)$ est une involution de $\mathcal{P}''_l$. On en déduit que $\sum\limits_{P\in\mathcal{P}''_l}(-1)^{|P|}\varepsilon(P)=0$.

Finalement,

$$\sum_{P\in\mathcal{P}^k_{ord}(n)}(-1)^{|P|}\varepsilon(P)=\sum_{P\in\mathcal{P}'}(-1)^{|P|}\varepsilon(P).$$

Il reste à montrer que $\sum\limits_{P\in\mathcal{P}'}(-1)^{|P|}\varepsilon(P)=0$. Supposons d'abord que $k\geqslant 2$. Soit $P\in\mathcal{P}'$, et soit $P=Q_1\dots Q_{2k}$ la décomposition en blocs de P. Soit $\mathfrak{S}'_{2k}$ l'ensemble des permutations $\sigma\in\mathfrak{S}_{2k}$ qui envoient les entiers impairs entre 1 et $2k$ sur des entiers impairs (donc σ envoie les entiers pairs sur des entiers pairs). On note $\mathcal{Q}$ l'ensemble des partitions ordonnées de $\{1,\dots,n\}$ de la forme $Q_{\sigma(1)}\dots Q_{\sigma(2k)}$, avec $\sigma\in\mathfrak{S}'_{2k}$. Il suffit de montrer que $\sum\limits_{P'\in\mathcal{P}'\cap\mathcal{Q}}(-1)^{|P'|}\varepsilon(P')=0$ (quelle que soit la partition ordonnée P de départ). Soit $P'=Q_{\sigma(1)}\dots Q_{\sigma(2k)}$, avec $\sigma\in\mathfrak{S}'_{2k}$. D'après le (iv) du lemme 7.15, il existe un unique $a\in\{1,\dots,2k\}$ tel que $P'':=Q_{\sigma(a)}\dots Q_{\sigma(2k)}Q_{\sigma(1)}\dots Q_{\sigma(a-1)}\in\mathcal{P}_{ord}(\lambda)$. Comme une partition de $\mathcal{P}_{ord}(\lambda)$ ne peut pas commencer par un bloc négatif, a est pair ; donc $P''\in\mathcal{Q}$ et $\varepsilon(P'')=\varepsilon(P)$. On en déduit que

$$\sum_{P'\in\mathcal{Q}\cap\mathcal{P}'}(-1)^{|P'|}\varepsilon(P')=\frac{1}{k}\sum_{P'\in\mathcal{Q}}(-1)^{|P'|}\varepsilon(P').$$

Notons, pour toute $P'=Q_{\sigma(1)}\dots Q_{\sigma(2k)}\in\mathcal{Q}$, $\iota(P')$ la partition ordonnée obtenue à partir de P' en échangeant $Q_{\sigma(1)}$ et $Q_{\sigma(3)}$. Alors ι est une involution de $\mathcal{Q}$, et $|\iota(P')|=|P'|$ et $\varepsilon(\iota(P'))=-\varepsilon(P')$ pour toute $P'\in\mathcal{Q}$. Donc $\sum\limits_{P'\in\mathcal{Q}}(-1)^{|P'|}\varepsilon(P')=0$.

Traitons enfin le cas où $k=1$. Soit $J\subset\{1,\dots,n\}$ de cardinal impair. On note $\mathcal{P}_J$ l'ensemble des partitions ordonnées $P\in\mathcal{P}^1_{ord}(\lambda)$ telles que J soit le deuxième ensemble de cardinal impair de P. On a $\mathcal{P}_J=\coprod\limits_{(J_1,J_2)}\mathcal{P}_{J,J_1,J_2}$, où :

- (J_1,J_2) parcourt l'ensemble des partitions en deux ensembles de $\{1,\dots,n\}-J$ telles que $|J_1|$ est impair (donc $|J_2|$ est pair), $s_{J_1}(\lambda)>0$ et $s_{J_2}(\lambda)\leqslant 0$ (noter qu'alors on a forcément $s_{J_1\cup J}(\lambda)>0$) ;
- $\mathcal{P}_{J,J_1,J_2}$ est l'ensemble des $P=(I_1,\dots,I_k)\in\mathcal{P}_J$ telles que, si le deuxième ensemble de cardinal

impair de P est I_r (i.e., $I_r = J$), alors $J_1 = I_1 \cup \cdots \cup I_{r-1}$ et $J_2 = I_{r+1} \cup \cdots \cup I_k$.

Soient $\mu = (\lambda_i)_{i\in J_1}$ et $\nu \in \mathbb{R}^{|J_2|}$ l'élément obtenu à partir de $(-\lambda_i)_{i\in J_2}$ en inversant l'ordre sur les indices. Alors se donner un élément de P de $\mathcal{P}_{J,J_1,J_2}$ revient à se donner un élément P_1 de $\mathcal{P}^0_{ord}(\mu)$ et un élément P_2 de l'analogue de $\mathcal{P}^0_{ord}(\nu)$ qu'on obtient en remplaçant toutes les inégalités strictes par des inégalités larges dans la définition.

En appliquant le lemme 7.6 (et la remarque 7.8) à μ et ν, on trouve, pour tout (J_1, J_2) comme ci-dessus :

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_{J,J_1,J_2}} (-1)^{|P|}\varepsilon(P)\varepsilon'(P) = (-1)^{n+1-|J|+\frac{1}{2}|J|(|J|-1)} \sum_{p\in\mathcal{P}'_{J,J_1,J_2}} \varepsilon(p),$$

où :

- $\mathcal{P}'_{J,J_1,J_2}$ est l'ensemble des partitions $p = \{I_\alpha, \alpha \in A\} \in \mathcal{P}(n)$ telles qu'il existe une partition $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \{\alpha_0\}$ de A avec :
  - $J = I_{\alpha_0}$, $J_1 = \bigcup\limits_{\alpha\in A_1} I_\alpha$, $J_2 = \bigcup\limits_{\alpha\in A_2} I_\alpha$;
  - pour tout $\alpha \in A_1$ (resp. A_2), $|I_\alpha| \leqslant 2$ (resp. $|I_\alpha| = 2$) et $s_{I_\alpha}(\lambda) > 0$ (resp. $\leqslant 0$) ;
  - il existe un unique $\alpha \in A_1$ tel que $|I_\alpha| = 1$;
- pour toute $p \in \mathcal{P}'_{J,J_1,J_2}$, on note $\varepsilon(p) = \varepsilon(P)$, où $P \in \mathrm{oub}^{-1}(p)$ est obtenue en choisissant un ordre sur les ensembles de p qui place J après l'autre ensemble de cardinal impair ($\varepsilon(P)$ ne dépend que de l'ordre des ensembles de cardinal impair de P).

Soit $\mathcal{P}'_J$ l'ensemble des $p = \{I_\alpha, \alpha \in A\} \in \mathcal{P}(n)$ telles que :

- il existe $\alpha_0 \in A$ tel que $I_{\alpha_0} = J$;
- il existe $\alpha_1 \in A - \{\alpha_0\}$ tel que $|I_{\alpha_1}| = 1$ et $s_{I_{\alpha_1}}(\lambda) > 0$;
- pour tout $\alpha \in A - \{\alpha_0, \alpha_1\}$, $|I_\alpha| = 2$.

Alors $\mathcal{P}'_J = \coprod\limits_{(J_1,J_2)} \mathcal{P}'_{J,J_1,J_2}$, où (J_1, J_2) parcourt le même ensemble d'indices que ci-dessus. De plus, $n + 1 - |J|$ est pair et $|J|$ est impair, donc $n + 1 - |J| + \frac{1}{2}|J|(|J| - 1) = \frac{1}{2}(|J| - 1) \mod 2$. Donc $\sum\limits_{P\in\mathcal{P}_J} (-1)^{|P|}\varepsilon(P)\varepsilon'(P) = (-1)^{\frac{1}{2}(|J|-1)} \sum\limits_{p\in\mathcal{P}'_J} \varepsilon(p)$.

Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. On note $\mathcal{P}''_k$ l'ensemble des partitions $p = \{I_\alpha, \alpha \in A\} \in \mathcal{P}(n)$ telles que :

- il existe $\alpha_0 \in A$ tel que $I_{\alpha_0} = \{k\}$;
- il existe $\alpha_1 \in A - \{\alpha_0\}$ tel que $|I_{\alpha_1}|$ soit impair ;
- pour tout $\alpha \in A - \{\alpha_0, \alpha_1\}$, $|I_\alpha| = 2$.

Pour toute $p \in \mathcal{P}''_k$, on pose $\varepsilon(p) = \varepsilon(P)$, où $P \in \mathrm{oub}^{-1}(p)$ est obtenue en choisissant un ordre sur les ensembles de p qui place $\{k\}$ avant l'autre ensemble de cardinal impair, et on note $\varepsilon''(p) = (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}$, où m est le cardinal de l'ensemble de cardinal impair de p qui n'est pas $\{k\}$.

Alors

$$\sum_J (-1)^{\frac{1}{2}(|J|-1)} \sum_{p\in\mathcal{P}'_J} \varepsilon(p) = \sum_k \sum_{p\in\mathcal{P}''_k} \varepsilon(p)\varepsilon''(p),$$

où, dans la première somme, J parcourt l'ensemble des sous-ensembles de cardinal impair de $\{1, \ldots, n\}$ et, dans la deuxième somme, k parcourt l'ensemble des éléments de $\{1, \ldots, n\}$ tels que $\lambda_k > 0$. Donc :

$$\sum_{P\in\mathcal{P}^1_{ord}(\lambda)} (-1)^{|P|}\varepsilon'(P)\varepsilon(P) = \sum_J \sum_{P\in\mathcal{P}_J} (-1)^{|P|}\varepsilon'(P)\varepsilon(P) = \sum_J (-1)^{\frac{1}{2}(|J|-1)} \sum_{p\in\mathcal{P}'_J} \varepsilon(p) = \sum_k \sum_{p\in\mathcal{P}''_k} \varepsilon(p)\varepsilon''(p),$$

où J et k parcourent les mêmes ensembles que plus haut.

Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Montrons que $\sum\limits_{p\in\mathcal{P}''_k} \varepsilon(p)\varepsilon''(p) = 0$ (ce qui finit la preuve du lemme). On voit facilement que ceci résulte du lemme 7.10 ci-dessous (appliqué à $n - 1$, qui est bien impair et $\geqslant 3$).

□

Lemme 7.10. *Soit $n \geqslant 3$ impair. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des partitions $p \in \mathcal{P}(n)$ telles que l'un des ensembles de p soit de cardinal impair et tous les autres ensembles de p soient de cardinal 2. Pour toute $p \in \mathcal{P}$, on note $\varepsilon''(p) = (-1)^{\frac{1}{2}(|I|-1)}$, où I est l'ensemble de cardinal impair de p. Alors*

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \varepsilon(p)\varepsilon''(p) = 0$$

($\varepsilon(p)$ est défini pour $p \in \mathcal{P}$, car p a un seul ensemble de cardinal impair).

Démonstration. Le raisonnement ressemble beaucoup à celui de la preuve du lemme 7.7. On note $m = (n-1)/2$. Soit $\mathcal{P}'$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}$ formé des partitions p telles que, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $2i$ et $2i-1$ soient dans le même ensemble de p. On définit par récurrence descendante sur $i \in \{1, \dots, m\}$ des sous-ensembles $\mathcal{P}''_i$ de $\mathcal{P}$ de la manière suivante : $\mathcal{P}''_i$ est l'ensemble des $p \in \mathcal{P} - \bigcup\limits_{j=i+1}^{m} \mathcal{P}''_j$ telles que $2i$ et $2i-1$ soient dans des ensembles différents de p.

Soit $i \in \{1, \dots, m\}$. On définit une involution de $\mathcal{P}''_i$ en envoyant une partition p sur la partition p' obtenue en échangeant $2i$ et $2i-1$. On a alors $\varepsilon(p') = -\varepsilon(p)$ et $\varepsilon''(p') = \varepsilon''(p)$; donc

$$\sum_{p \in \mathcal{P}''_i} \varepsilon(p)\varepsilon''(p) = 0.$$

On en déduit que $\sum\limits_{p \in \mathcal{P}} \varepsilon(p)\varepsilon''(p) = \sum\limits_{p \in \mathcal{P}'} \varepsilon(p)\varepsilon''(p)$. D'autre part, on remarque que $\varepsilon(p) = 1$ pour toute $p \in \mathcal{P}'$. Donc

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \varepsilon(p)\varepsilon''(p) = \sum_{p \in \mathcal{P}'} \varepsilon''(p).$$

On remarque qu'une partition de $\mathcal{P}'$ est entièrement déterminée par la donnée de son ensemble de cardinal impair. Soit $p \in \mathcal{P}'$, et soit I son ensemble de cardinal impair ; alors :
- $n \in I$;
- I est entièrement déterminé par son intersection avec l'ensemble $J := \{2i-1, 1 \leqslant i \leqslant m\}$, et tous les sous-ensembles de J apparaissent de cette manière ;
- $|I \cap J| = \frac{1}{2}(|I|-1)$.

Finalement,

$$\sum_{p \in \mathcal{P}'} \varepsilon''(p) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k = 0.$$

□

Lemme 7.11. *Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n > 0$. Alors :*
(i) Les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) $N(\lambda) = n$;
(b) il n'existe pas de partition (I_1, I_2) de $\{1, \dots, n\}$ telle que $s_{I_1}(\lambda) > 0$ et $s_{I_2}(\lambda) > 0$.
(ii) Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\tau^k(\lambda) > 0$. De plus, s'il n'existe pas de partition (I_1, I_2) de $\{1, \dots, n\}$ telle que $s_{I_1}(\lambda) > 0$ et $s_{I_2}(\lambda) > 0$, alors un tel entier k est uniquement déterminé modulo n.

Démonstration. Montrons (i). Supposons que $N(\lambda) = n$ et qu'il existe une partition (I_1, I_2) de $\{1, \dots, n\}$ telle que $s_{I_1}(\lambda) > 0$ et $s_{I_2}(\lambda) > 0$. D'après la définition de $\delta(\lambda)$, on a $s_{I_1}(\lambda) > \delta(\lambda)|I_1|$ et

$s_{I_2}(\lambda) > \delta(\lambda)|I_2|$, donc $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = s_{I_1}(\lambda) + s_{I_2}(\lambda) > n\delta(\lambda)$, contradiction. Donc (a) implique (b).

Réciproquement, supposons que $N(\lambda) < n$, et soit $I_1 \subset \{1, \ldots, n\}$ tel que $s_{I_1}(\lambda)/|I_1| = \delta(\lambda)$ et $|I_1| = N(\lambda)$. On note $I_2 = \{1, \ldots, n\} - I_1$. Alors $s_{I_2}(\lambda) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n - s_{I_1}(\lambda) \geqslant (n - |I_1|)\delta(\lambda) > 0$. Donc (b) implique (a).

Montrons (ii). On note $s = \min\{\lambda_1 + \cdots + \lambda_l, 1 \leqslant l \leqslant n\}$. Soit k le plus grand élément de $\{1, \ldots, n\}$ tel que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = s$. Si $l \in \{k+1, \ldots, n\}$, on a $\lambda_1 + \cdots + \lambda_l > \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$, donc $\lambda_{k+1} + \cdots + \lambda_l > 0$. Si $l \in \{1, \ldots, k\}$, on a

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1} + \cdots + \lambda_n + \lambda_1 + \cdots + \lambda_l &= (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_k) + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_l) \\ &> -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k) + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_l) \\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

Ceci prouve que $\tau^k(\lambda) = (\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) > 0$.

Montrons la dernière assertion de (ii). On suppose qu'il existe $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $k < l$, $\tau^k(\lambda) > 0$ et $\tau^l(\lambda) > 0$. On note $I_1 = \{k+1, \ldots, l\}$ et $I_2 = \{1, \ldots, n\} - I_1$. Alors $s_{I_1}(\lambda) = \lambda_{k+1} + \cdots + \lambda_l > 0$ car $\tau^k(\lambda) > 0$, et $s_{I_2}(\lambda) = \lambda_{l+1} + \cdots + \lambda_n + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k > 0$ car $\tau^l(\lambda) > 0$.

□

Remarque 7.12. L'entier k défini dans la preuve de la première partie de (ii) du lemme ci-dessus est l'unique élément de $\{1, \ldots, n\}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

(a) pour tout $l \in \{k+1, \ldots, n\}$, $\lambda_{k+1} + \cdots + \lambda_l > 0$;

(b) pour tout $l \in \{2, \ldots, k\}$, $\lambda_l + \cdots + \lambda_k \leqslant 0$.

(Un tel k existe même si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \leqslant 0$.)

Lemme 7.13. *Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n > 0$ et qu'il n'existe pas de partition $\{I_1, I_2\}$ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $s_{I_1}(\lambda) > 0$ et $s_{I_2}(\lambda) > 0$. Alors $|\mathfrak{S}(\lambda)| = (n-1)!$.*

Démonstration. D'après le lemme 7.11, $\mathfrak{S}_n$ est union disjointe des sous-ensembles $\tau^k\mathfrak{S}(\lambda)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. La conclusion du lemme en résulte.

□

Lemme 7.14. *Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tel que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n > 0$. On note $\delta = \delta(\lambda)$. Soit $J \subset \{1, \ldots, n\}$ tel que $s_J(\lambda)/|J| = \delta$ et $|J| = N(\lambda)$. On définit $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n) \in \mathbb{R}^n$ par :*

$$\lambda'_i = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i \notin J \\ \lambda_i - \delta & \text{si } i \in J \end{cases}.$$

On note $\mathcal{P}'_{ord}(n)$ l'ensemble des $P = (I_1, \ldots, I_k) \in \mathcal{P}_{ord}(n)$ telles qu'il existe $r \in \{1, \ldots, k\}$ avec $J = I_1 \cup \cdots \cup I_r$, et $\mathcal{P}'(n) = \mathrm{oub}(\mathcal{P}'_{ord}(n))$. Alors :

(i) Pour tout $K \subset \{1, \ldots, n\}$ tel que $K \neq J$, on a $s_K(\lambda') > 0$ si et seulement si $s_K(\lambda) > 0$.

(ii) On a

$$\mathcal{P}_{ord}(\lambda) = \mathcal{P}_{ord}(\lambda') \sqcup (\mathcal{P}'_{ord}(n) \cap \mathcal{P}_{ord}(\lambda))$$

$$\mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}(\lambda') \sqcup (\mathcal{P}'(n) \cap \mathcal{P}(\lambda)).$$

En particulier, $|\mathcal{P}_{ord}(\lambda')| < |\mathcal{P}_{ord}(\lambda)|$ et $|\mathcal{P}(\lambda')| < |\mathcal{P}(\lambda)|$.

Notons $m = N(\lambda)(= |J|)$. On écrit $J = \{i_1, \ldots, i_m\}$ avec $i_1 < \cdots < i_m$ et $K := \{1, \ldots, n\} - J = \{j_1, \ldots, j_{n-m}\}$ avec $j_1 < \cdots < j_{n-m}$. On a des bijections $u_J : J \xrightarrow{\sim} \{1, \ldots, m\}, i_r \longmapsto r$ et $u_K : K \xrightarrow{\sim} \{1, \ldots, n-m\}, j_r \longmapsto r$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ défini par $\sigma(i_r) = r$ pour tout $r \in \{1, \ldots, m\}$ et $\sigma(j_r) = m + r$ pour tout $r \in \{1, \ldots, n-m\}$ (autrement dit, $\sigma = \sigma_{(J,K)}$). On note $\varepsilon_0 = sgn(\sigma)(=$

$\varepsilon(J,K)$). On définit une application $\varphi_{ord} : \mathcal{P}'_{ord}(n) \longrightarrow \mathcal{P}_{ord}(m) \times \mathcal{P}_{ord}(n-m)$ de la manière suivante : si $P = (I_1,\dots,I_k) \in \mathcal{P}'_{ord}(n)$ et si $r \in \{1,\dots,k\}$ est tel que $I_1 \cup \dots \cup I_r = J$, on pose $\varphi_{ord}(P) = ((u_J(I_1),\dots,u_J(I_r)),(u_K(I_{r+1}),\dots,u_K(I_k)))$. On définit de manière similaire une application $\varphi : \mathcal{P}'(n) \longrightarrow \mathcal{P}(m) \times \mathcal{P}(n-m)$. Enfin, on définit $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_m) \in \mathbb{R}^m$ et $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m}$ par $\mu_r = \lambda_{u_J^{-1}(r)} = \lambda_{i_r}$ et $\nu_r = \lambda_{u_K^{-1}(r)} = \lambda_{j_r}$. Alors :

(iii) Pour toute $P \in \mathcal{P}'_{ord}(n)$, si $\varphi_{ord}(P) = (P_1,P_2)$ alors $\varepsilon(P) = \varepsilon_0\varepsilon(P_1)\varepsilon(P_2)$ et $\varepsilon'(P) = \varepsilon'(P_1)\varepsilon'(P_2)$.

(iv) L'application φ_{ord} induit une bijection $\mathcal{P}'_{ord}(n) \cap \mathcal{P}_{ord}(\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_{ord}(\mu) \times \mathcal{P}_{ord}(\nu)$, et l'application φ induit une bijection $\mathcal{P}'(n) \cap \mathcal{P}(\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(\mu) \times \mathcal{P}(\nu)$.

Démonstration. Montrons (i). Soit $K \subset \{1,\dots,n\}$. Alors, par définition de λ', $s_K(\lambda') = s_K(\lambda) - \delta|K \cap J|$. Il est clair que $s_K(\lambda) > 0$ si $s_K(\lambda') > 0$. On suppose que $s_K(\lambda) > 0$. Si $K \not\subset J$, alors $s_K(\lambda) \geqslant \delta|K|$ et $|K| > |K \cap J|$, donc $s_K(\lambda') > 0$. Si $K \subset J$ et $K \neq J$, alors $s_K(\lambda) > \delta|K|$ (car $|K| < |J| = N(\lambda)$), donc $s_K(\lambda') > 0$.

Montrons (ii). Comme $\lambda'_i \leqslant \lambda_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ et $s_J(\lambda') = 0$, il est clair que $\mathcal{P}(\lambda') \subset \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathcal{P}_{ord}(\lambda') \subset \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$, $\mathcal{P}(\lambda') \cap \mathcal{P}'(n) = \varnothing$ et $\mathcal{P}_{ord}(\lambda') \cap \mathcal{P}'_{ord}(n) = \varnothing$.

Soit $P = (I_1,\dots,I_k) \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda) - \mathcal{P}'_{ord}(n)$; montrons que $P \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda')$. Il suffit de montrer que $s_{I_1}(\lambda') > 0$, car $(I_1 \cup \dots \cup I_r, I_{r+1},\dots,I_k) \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda) - \mathcal{P}'_{ord}(n)$ pour tout $r \in \{1,\dots,k\}$. Or $I_1 \neq J$ et $s_{I_1}(\lambda) > 0$, donc ceci résulte de (i).

Soit $p = \{I_\alpha, \alpha \in A\} \in \mathcal{P}(\lambda) - \mathcal{P}'(n)$; montrons que $p \in \mathcal{P}(\lambda')$. Soit $\alpha \in A$. On a $I_\alpha \neq J$ et $s_{I_\alpha}(\lambda) > 0$, donc, d'après (i), $s_{I_\alpha}(\lambda') > 0$.

La dernière assertion de (ii) résulte du fait que $(J, \{1,\dots,n\} - J) \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda) \cap \mathcal{P}'_{ord}(n)$ et $\{J, \{1,\dots,n\} - J\} \in \mathcal{P}(\lambda) \cap \mathcal{P}'(n)$.

Le point (iii) résulte facilement des définitions. Montrons (iv). Il est clair que φ_{ord} et φ sont injectives, et que $\varphi_{ord}^{-1}(\mathcal{P}_{ord}(\mu) \times \mathcal{P}_{ord}(\nu)) \subset \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$ et $\varphi^{-1}(\mathcal{P}(\mu) \times \mathcal{P}(\nu)) = \mathcal{P}(\lambda)$. Soit $P = (I_1,\dots,I_k) \in \mathcal{P}'_{ord}(n) \cap \mathcal{P}(\lambda)$; montrons que $\varphi_{ord}(P) \in \mathcal{P}_{ord}(\mu) \times \mathcal{P}_{ord}(\nu)$. Soit $r \in \{1,\dots,k\}$ tel que $J = I_1 \cup \dots \cup I_r$. Il s'agit de montrer que, pour tout $s \geqslant r+1$, $s_{I_{r+1}\cup\dots\cup I_s}(\lambda) > 0$. Comme on peut, sans changer le problème, remplacer P par $(I_1 \cup \dots \cup I_r, I_{r+1} \cup \dots I_s, I_{s+1},\dots,I_k)$ (qui est aussi dans $\mathcal{P}'_{ord}(n) \cap \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$), on peut supposer que $r = 1$ (donc $J = I_1$) et $s = 2$. On a alors

$$s_{I_2}(\lambda) = s_{J\cup I_2}(\lambda) - s_J(\lambda) = s_{J\cup I_2}(\lambda) - \delta|J| \geqslant \delta(|J \cup I_2| - |J|) > 0.$$

□

Soient $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $Q = (I_1,\dots,I_r)$ une partition ordonnée d'un sous-ensemble I de $\{1,\dots,n\}$. Si $k \in \{1,\dots,r\}$, on dit que Q est un *bloc de centre* I_k (pour λ) si, pour tous $i \in \{1,\dots,k-1\}$ et $j \in \{k+1,\dots,r\}$, on a $s_{I_1}(\lambda) + \dots + s_{I_i}(\lambda) > 0$ et $s_{I_j}(\lambda) + \dots + s_{I_r}(\lambda) \leqslant 0$. On dit que Q est un *bloc* s'il existe $k \in \{1,\dots,r\}$ tel que Q soit un bloc de centre I_k (noter qu'un tel k n'est pas forcément unique) ; la *taille* du bloc Q est par définition $|I|$, et le *support* de Q est I. On dit qu'un bloc Q de support I est *positif* si $s_I(\lambda) > 0$, et *négatif* sinon.

Soit $P \in \mathcal{P}_{ord}(n)$. On dit que $(Q_1,\dots,Q_k)$ est une *décomposition en blocs* de P si :

- pour tout $l \in \{1,\dots,k\}$, $Q_l = (I_1^l,\dots,I_{r_l}^l)$ est une partition ordonnée d'un sous-ensemble de $\{1,\dots,n\}$, et Q_l est un bloc ;
- $P = (I_1^1,\dots,I_{r_1}^1,\dots,I_1^k,\dots,I_{r_k}^k)$.

On écrira souvent $P = Q_1 \dots Q_k$.

LEMME 7.15. *(i) Soit $Q = (I_1,\dots,I_r)$ un bloc pour λ. Si Q est positif (resp. négatif), alors, pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$, $s_{I_1}(\lambda) + \dots + s_{I_i}(\lambda) > 0$ (resp. $s_{I_i}(\lambda) + \dots + s_{I_r}(\lambda) \leqslant 0$).*

(ii) Soient $P \in \mathcal{P}_{ord}(n)$, $P = Q_1 \dots Q_k$ une décomposition en blocs de P et $l \in \{1, \dots, k-1\}$. On suppose que $P \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$ et que Q_l est négatif ou Q_{l+1} est positif. Alors $P' := Q_1 \dots Q_{l-1} Q_{l+1} Q_l Q_{l+2} \dots Q_k \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$. De plus, on a $|P'| = |P|$ et $\varepsilon(P') = (-1)^{n_l n_{l+1}} \varepsilon(P)$, où n_l (resp. n_{l+1}) est la taille de Q_l (resp. Q_{l+1}).

Dans la suite du lemme, on suppose que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n > 0$ et que $N(\lambda) = n$. Alors :

(iii) Soient $P = (I_1, \dots, I_r) \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$, soit $k \in \{1, \dots, r\}$ et soient $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, r\}$ tels que $i_1 < \dots < i_k$. Alors il existe une unique décomposition en blocs $P = Q_1 \dots Q_k$ telle que I_{i_l} soit un centre de Q_l pour tout $l \in \{1, \dots, k\}$. De plus, Q_1 est positif et, si $k \geqslant 2$, Q_k est négatif.

(iv) Soient $P = (I_1, \dots, I_r) \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$ et $P = Q_1 \dots Q_k$ une décomposition en blocs de P. Alors il existe un unique $s \in \{1, \dots, r\}$ tel que $P' := (I_s, \dots, I_r, I_1, \dots, I_{s-1}) \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$, et P' est de la forme $P' = Q_l \dots Q_k Q_1 \dots Q_{l-1}$, pour un $l \in \{1, \dots, k\}$ uniquement déterminé.

Démonstration.

(i) Soit $k \in \{1, \dots, r\}$ tel que I_k soit un centre de Q. On suppose que Q est positif. D'après la définition d'un bloc de centre I_k, on a $s_{I_1}(\lambda) + \dots + s_{I_i}(\lambda) > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$. D'autre part, pour tout $i \in \{k, \dots, r\}$,

$$\begin{aligned} s_{I_1}(\lambda) + \dots + s_{I_i}(\lambda) &= (s_{I_1}(\lambda) + \dots + s_{I_r}(\lambda)) - (s_{I_{i+1}}(\lambda) + \dots + s_{I_r}(\lambda)) \\ &\geqslant s_{I_1}(\lambda) + \dots + s_{I_r}(\lambda) > 0. \end{aligned}$$

Le cas où Q est négatif se traite de manière similaire.

(ii) On écrit $Q_l = (I_1, \dots, I_r)$ et $Q_{l+1} = (J_1, \dots, J_s)$, et on note S la somme des $s_I(\lambda)$, pour I parcourant les ensembles de $Q_1, \dots, Q_{l-1}$. Pour tous $i \in \{1, \dots, r\}$ et $j \in \{1, \dots, s\}$, on note $B_i = s_{I_i}(\lambda)$ et $C_j = s_{J_j}(\lambda)$. Comme $P \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$, on a $S > 0$. Il s'agit de montrer que, pour tous $i \in \{1, \dots, r\}$ et $j \in \{1, \dots, s\}$,

$$S + C_1 + \dots + C_j > 0$$

et

$$S + C_1 + \dots + C_s + B_1 + \dots + B_i > 0.$$

On suppose que Q_{l+1} est positif. Alors la première inégalité résulte immédiatement du point (i), et la deuxième inégalité résulte du fait que $C_1 + \dots + C_s > 0$ et que $S + B_1 + \dots + B_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ (car $P \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$). On suppose que Q_l est négatif. Soit $j \in \{1, \dots, s\}$. Alors

$$\begin{aligned} S + C_1 + \dots + C_j &= (S + B_1 + \dots + B_r + C_1 + \dots + C_j) - (B_1 + \dots + B_r) \\ &\geqslant S + B_1 + \dots + B_r + C_1 + \dots + C_j > 0 \end{aligned}$$

(la première inégalité vient du fait que Q_l est négatif, et la deuxième du fait que $P \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$). Soit $i \in \{1, \dots, r\}$. Alors

$$\begin{aligned} &S + C_1 + \dots + C_s + B_1 + \dots + B_i \\ &\quad = (S + B_1 + \dots + B_r + C_1 + \dots + C_s) - (B_{i+1} + \dots + B_r) \\ &\quad \geqslant S + B_1 + \dots + B_r + C_1 + \dots + C_s > 0. \end{aligned}$$

Enfin, la dernière phrase de (ii) est évidente.

(iii) On note $\mu = \lambda_P \in \mathbb{R}^r$ (donc $\mu_i = s_{I_i}(\lambda)$). On remarque que :

(a) Pour tout $i \in \{1, \dots, i_1 - 1\}$ (et même $\{1, \dots, r\}$), $\mu_1 + \dots + \mu_i > 0$.

(b) Pour tout $i \in \{i_k + 1, \dots, n\}$ (et même $\{2, \dots, r\}$), $\mu_i + \dots + \mu_r \leqslant 0$.

(c) Soit $l \in \{1, \dots, k-1\}$. Il existe un unique $i \in \{i_l + 1, \dots, i_{l+1} - i\}$ tel que, pour tout $j \in \{i+1, \dots, i_{l+1} - 1\}$, on ait $\mu_{i+1} + \dots + \mu_j > 0$ et, pour tout $j \in \{i_l + 1, \dots, i\}$, on ait $\mu_j + \dots + \mu_i \leqslant 0$.

En effet, le point (a) résulte du fait que $P \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$. Le point (b) résulte du fait que $P \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$ et du fait, d'après l'hypothèse $N(\lambda) = n$ et le lemme 7.11, il n'existe pas de partition (I, J) de $\{1, \dots, n\}$ telle que $s_I(\lambda) > 0$ et $s_J(\lambda) > 0$. Enfin, le point (c) résulte de la remarque 7.12, appliquée à $(\mu_{i_l}, \dots, \mu_{i_{l+1}-1}) \in \mathbb{R}^{i_{l+1}-i_l}$.
Autrement dit, on peut écrire de manière unique

$$P = (A_1^1, \dots, A_{r_1}^1, B_1, C_1^1, \dots, C_{s_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{r_k}^k, B_k, C_1^k, \dots, C_{s_k}^k)$$

avec :
- pour tout $l \in \{1, \dots, k\}$, $B_l = I_{i_l}$;
- pour tout $l \in \{1, \dots, k\}$, pour tous $i \in \{1, \dots, r_l\}$ et $j \in \{1, \dots, s_l\}$, $s_{A_1^l}(\lambda) + \dots + s_{A_i^l}(\lambda) > 0$ et $s_{C_j^l}(\lambda) + \dots + s_{C_{s_l}^l}(\lambda) \leqslant 0$.

On pose, pour tout $l \in \{1, \dots, k\}$, $Q_l = (A_1^l, \dots, A_{r_l}^l, B_l, C_1^l, \dots, C_{s_l}^l)$. Il est clair (d'après les points (a) et (b) ci-dessus) que Q_1 est positif et Q_k négatif.

(iv) L'existence et l'unicité de s résultent du lemme 7.11. Pour tout $a \in \{1, \dots, k\}$, on note μ_a la somme des $s_I(\lambda)$, pour I parcourant les ensembles de Q_a. Alors, en appliquant le lemme 7.11 à $(\mu_1, \dots, \mu_k)$, on voit qu'il existe un unique $l \in \{1, \dots, k\}$ tel que $(\mu_l, \dots, \mu_k, \mu_1, \dots, \mu_{l-1}) > 0$. On note $P'' = Q_l \dots Q_k Q_1 \dots Q_{l-1}$. Pour prouver (iv), il suffit de montrer que $P'' \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$.
On se ramène donc à montrer l'énoncé suivant (où les notations ne sont plus les mêmes) :
Soient $P \in \mathcal{P}_{ord}(n)$ et $P = Q_1 \dots Q_k$ une décomposition en blocs de P. Pour tout $a \in \{1, \dots, k\}$, on note μ_a la somme des $s_I(\lambda)$, pour I parcourant les ensembles de Q_a. On suppose que $(\mu_1, \dots, \mu_k) > 0$. Alors $P \in \mathcal{P}_{ord}(\lambda)$.
Pour tout $a \in \{1, \dots, k\}$, on écrit $Q_a = (I_1^a, \dots, I_{r_a}^a)$. Soient $a \in \{1, \dots, k\}$ et $i \in \{1, \dots, r_a\}$. On veut montrer que

$$\mu_1 + \dots + \mu_{a-1} + s_{I_1^a}(\lambda) + \dots + s_{I_i^a}(\lambda) > 0.$$

Si le bloc Q_a est positif, cela résulte de (i) (et de la positivité de $(\mu_1, \dots, \mu_k)$). Supposons que Q_a est négatif. Alors, toujours grâce à (i) :

$$\begin{aligned} \mu_1 + \dots + \mu_{a-1} + s_{I_1^a}(\lambda) + \dots + s_{I_i^a}(\lambda) &= \mu_1 + \dots + \mu_a - (s_{I_{i+1}^a}(\lambda) + \dots + s_{I_{r_a}^a}(\lambda)) \\ &\geqslant \mu_1 + \dots + \mu_a > 0. \end{aligned}$$

□

RÉFÉRENCES

A J. Arthur, *The L^2-Lefschetz numbers of Hecke operators*, Inv. Math. 97 (1989), p 257-290

B A. Borel, *Automorphic L-functions*, dans *Automorphic forms, representations, and L-functions* (Proc. Symposia in Pure Math., volume 33, 1977), tome 2, p 26-61

C V.I. Chernousov, *The Hasse principle for groups of type E_8*, Soviet Math. Dokl. 39 (1989), p 592-596

CD L. Clozel et P. Delorme, *Pseudo-coefficients et cohomologie des groupes de Lie réductifs réels*, C.R. Acad. Sc. Paris 300, série I (1985), p 385-287

D J. Dieudonné, *La géométrie des groupes classiques. Troisième édition*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 5, Springer (1971)

GHM M. Goresky, G. Harder et R. MacPherson, *Weighted cohomology*, Invent. math. 166 (1994), p 139-213

GKM M. Goresky, R. Kottwitz et R. MacPherson, *Discrete series characters and the Lefschetz formula for Hecke operators*, Duke Math. J. 89 (1997), p 477-554 et Duke Math. J. 92 (1998), no. 3, p 665-666

Ha T. Hales, *A simple definition of transfer factors for unramified groups*, in *Representation theory of groups and algebras*, édité par J. Adams, R. Herb, S. Kudla, J.-S. Li, R. Lipsman et J. Rosenberg, Contemporary Mathematics 145 (1993), p 109-134

H R. Herb, *Characters of averaged discrete series on semisimple real Lie groups*, Pac. J. Math. 80 (1979), p 169-177

K1 R. Kottwitz, *Sign changes in harmonic analysis on reductive groups*, Trans. A.M.S. 278 (1983), p 289-297

K2 R. Kottwitz, *Shimura varieties and twisted orbital integrals*, Math. Ann. 269 (1984), p 287-300

K3 R. Kottwitz, *Stable trace formula : cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. 51 (1984), p 611-650

K4 R. Kottwitz, *Base change for units of Hecke algebras*, Compositio Math. 60 (1986), p 237-250

K5 R. Kottwitz, *Stable trace formula : elliptic singular terms*, Math. Ann. 275 (1986), p 365-399

K6 R. Kottwitz, *Tamagawa numbers*, Ann. of Math. 127 (1988), p 629-646

K7 R. Kottwitz, *Shimura varieties and λ-adic representations*, dans *Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions*, partie I, Perspectives in Mathematics vol. 10, Academic Press, San Diego, CA (1990), p 161-209

K8 R. Kottwitz, non publié

Lan1 R. Langlands, *Stable conjugacy : definitions and lemmas*, Can. J. Math. 31 (1979), p 700-725

Lan2 R. Langlands, *Les débuts d'une formule des traces stable*, Publ. Math. Univ. Paris VII vol. 13, Paris (1983)

LR R. Langlands et D. Ramakrishnan (éditeurs), *The zeta function of Picard modular surfaces*, publications du CRM (1992), Montréal

LS1 R. Langlands and D. Shelstad, *On the definition of transfer factors*, Math. Ann. 278 (1987), p 219-271

LS2 R. Langlands and D. Shelstad, *Descent for transfer factors*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr. Math. 87, Birkhäuser (1990), p 485-563

Lau1 G. Laumon, *Sur la cohomologie à supports compacts des variétés de Shimura pour* $\mathbf{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}$, Compositio Math. 105 (1997), no. 3, p 267-359

Lau2 G. Laumon, *Fonctions zêta des variétés de Siegel de dimension trois*, dans *Formes automorphes II. Le cas du groupe* $\mathbf{GSp}(4)$, Astérisque 302 (2005), p 1-66

LN G. Laumon and B.-C. Ngo, *Le lemme fondamental pour les groupes unitaires*, Annals of Math. 168 (2008), no. 2, p 477-573

M1 S. Morel, *Complexes pondérés sur les compactifications de Baily-Borel. Le cas des variétés de Siegel*, Journal of the AMS 21 (2008), no. 1, p 23-61

M2 S. Morel, *On the cohomology of certain non-compact Shimura varieties* (à paraître dans la série Annals of Mathematics Studies de Princeton University Press), http ://www.math.ias.edu/ morel/stabilisation.pdf

N B. C. Ngo, *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie* (soumis), arXiv :0801.0446

O T. Ono, *On Tamagawa numbers*, in *Algebraic groups and discontinuous subgroups*, édité par A. Borel et G. Mostow, Proceedings of Symposia in Pure Math. 9 (1966)

P1 R. Pink, *Arithmetical compactification of mixed Shimura varieties*, thèse, Bonner Mathematische Schriften 209 (1989)

P2 R. Pink, *On ℓ-adic sheaves on Shimura varieties and their higher direct images in the Baily-Borel compactification*, Math. Ann. 292 (1992), 197-240

R J. Rogawski, *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Annals of Mathematics Study 123, Princeton University Press (1990)

W1 J.-L.Waldspurger, *Le lemme fondamental implique le transfert*, Comp. Math. 105 (1997), n°2, p 153-236

W2 J.-L.Waldspurger, *Endoscopie et changement de caractéristique*, J. Inst. Math. Jussieu 5 (2006), n°3, p 423-525

W3 J.-L.Waldspurger, *L'endoscopie tordue n'est pas si tordue*, Mem. Amer. Math. Soc. 194 (2008), no. 908

Sophie Morel morel@math.harvard.edu
Department of Mathematics, Harvard University, One Oxford Street, Cambridge, MA 02138, USA